УДК 512.532.2

Б. М. Верников, М. В. Волков

ПОЛУМОДУЛЯРНЫЕ И ДЕЗАРГОВЫ МНОГООБРАЗИЯ ПОЛУГРУПП: ЗАВЕРШЕНИЕ ОПИСАНИЯ*

Введение

Данная статья является непосредственным продолжением [1,2]. Основной целью этого цикла статей является описание многообразий полугрупп со слабо полумодулярной (вверх или вниз) решеткой подмногообразий и многообразий полугрупп с дезарговой решеткой подмногообразий. Соответствующие результаты были сформулированы в [1, теоремы 2 и 3], а их доказательство начато в [1,2]. В данной статье доказательство будет завершено, одновременно мы завершаем описание многообразий полугрупп с модулярной решеткой подмногообразий. Это описание было анонсировано вторым автором в [3], см. также [1, теорема 1]. Его доказательство «по модулю ниль-случая» опубликовано в [4–7], а доказательство в ниль-случае начато в работах [1, 2]. Мы отсылаем заинтересованного читателя к [1] за более подробными комментариями. Отметим еще, что для понимания той части доказательств, которая излагается в данной работе, знакомство с работами [1,2] не обязательно.

«По модулю» [1, 2] нам осталось проверить два утверждения, которые и являются основными результатами данной статьи. В их формулировках фигурируют три следующих набора перестановок множества $\{1, 2, 3, 4\}$:

$$\begin{aligned}
\Pi_1 &= \{(123), (124), (134), (234), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\};\\
\Pi_2 &= \{(123), (124), (134), (234), (12)(34), (13)(24)\};\\
\Pi_3 &= \{(123), (124), (134), (234), (12)(34)\}.
\end{aligned}$$

Через $L(\mathcal{V})$ обозначается решетка подмногообразий многообразия $\mathcal{V}$.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{V}$ – многообразие полугрупп, удовлетворяющее одной из следующих систем тождеств (где n – натуральное число):*

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 01-01-00258), межвузовской научной программы «Университеты России» (проект № 04.01.045) и президентской программы поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (проект НШ-2227.2003.1).

$xy = (xy)^{n+1};$ $(m1)$

$xy = x^{n+1}y,\ (xy)^{n+1} = xy^{n+1},\ xyzt = xyx^n zt;$ $(m2)$

$xy = xy^{n+1},\ (xy)^{n+1} = x^{n+1}y,\ xyzt = xyt^n zt;$ $(m3)$

$x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi},\ x^2y = xyx = yx^2 = x^{n+2}y\ (\pi \in \Pi_1);$ $(m4)$

$x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}, x^2y = xyx = yx^2, x^3yz = xy^3z, x^6 = x^7\ (\pi \in \Pi_1);$ $(m5)$

$x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi},\ x^2y = xyx = yx^2,\ x^2y^2z = xy^2z^2\ (\pi \in \Pi_1);$ $(m6)$

$x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi},\ x^2y = xyx = yx^2,\ x^3yz = xy^2z^2\ (\pi \in \Pi_1);$ $(m7)$

$x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi},\ x^2y = xyx,\ xy^2 = yx^2\ (\pi \in \Pi_1);$ $(m8)$

$x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi},\ x^2y = y^2x,\ xy^2 = yxy\ (\pi \in \Pi_1);$ $(m9)$

$x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi},\ x^2y = yxy,\ xy^2 = yx^2\ (\pi \in \Pi_1);$ $(m10)$

$x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi},\ x^2y = y^2x,\ xy^2 = xyx\ (\pi \in \Pi_1);$ $(m11)$

$x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi},\ x^2y = xy^2,\ xyx = yxy\ (\pi \in \Pi_1);$ $(m12)$

$x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi},\ x^2y = yxy = yx^2\ (\pi \in \Pi_1);$ $(m13)$

$x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi},\ x^2y = xyx = xy^2,\ x^4y = yx^4\ (\pi \in \Pi_1);$ $(m14)$

$x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi},\ x^2y = yxy = xy^2,\ x^4y = yx^4\ (\pi \in \Pi_1);$ $(m15)$

$x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi},\ x^2y = y^2x,\ xyx = x^2yx,\ x^3y = yx^3\ (\pi \in \Pi_1);$ $(m16)$

$x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi},\ xy^2 = yx^2,\ xyx = xyx^2,\ x^3y = yx^3\ (\pi \in \Pi_1);$ $(m17)$

$x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi},\ x^2y = x^3y,\ xyx = yxy,\ x^3y = yx^3\ (\pi \in \Pi_1);$ $(m18)$

$x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi},\ xy^2 = xy^3,\ xyx = yxy,\ x^3y = yx^3\ (\pi \in \Pi_1);$ $(m19)$

$x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi},\ x^2y = yx^2,\ xyx = yxy\ (\pi \in \Pi_2);$ $(m20)$

$xyzt = tzyx,\ x^2y = yx^2,\ xyx = yxy,\ x^2yz = y^2zx;$ $(m21)$

$xyzt = tzyx,\ x^2y = yx^2,\ xyx = yxy,\ x^2yz = yzyx;$ $(m22)$

$xyzt = tzyx,\ x^2y = yx^2,\ xyx = yxy,\ xyxz = yzyx;$ $(m23)$

$x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi},\ x^2y = x^3y,\ xy^2 = yx^2,\ x^3y = yx^3\ (\pi \in \Pi_3);$ $(m24)$

$x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi},\ x^2y = y^2x,\ xy^2 = xy^3,\ x^3y = yx^3\ (\pi \in \Pi_3);$ $(m25)$

$xyzt = ztxy,\ x^2y = x^3y,\ xy^2 = yx^2,\ xyxz = yxzx;$ $(m26)$

$xyzt = ztxy,\ x^2y = x^3y,\ xy^2 = yx^2,\ xyxz = yxyz;$ $(m27)$

$xyzt = ztxy,\ x^2y = x^3y,\ xy^2 = yx^2,\ xyzy = xzyz;$ $(m28)$

$xyzt = ztxy,\ x^2y = y^2x,\ xy^2 = xy^3,\ xyxz = yxzx;$ $(m29)$

$xyzt = ztxy,\ x^2y = y^2x,\ xy^2 = xy^3,\ xyxz = yxyz;$ $(m30)$

$xyzt = ztxy,\ x^2y = y^2x,\ xy^2 = xy^3,\ xyzy = xzyz;$ $(m31)$

$xyzt = tzyx,\ x^2y = x^3y,\ xy^2 = yx^2,\ xyxz = xyzx;$ $(m32)$

$xyzt = tzyx,\ x^2y = x^3y,\ xy^2 = yx^2,\ xyxz = yxzy;$ $(m33)$

$xyzt = tzyx,\ x^2y = x^3y,\ xy^2 = yx^2,\ xyxz = zxyz;$ $(m34)$

$xyzt = tzyx,\ x^2y = x^3y,\ xy^2 = yx^2,\ xyxz = yzyx;$ $(m35)$

$xyzt = tzyx,\ x^2y = x^3y,\ xy^2 = yx^2,\ xyzx = yxzy;$ $(m36)$

$xyzt = tzyx,\ x^2y = y^2x,\ xy^2 = xy^3,\ xyxz = xyzx;$ $(m37)$

$xyzt = tzyx,\ x^2y = y^2x,\ xy^2 = xy^3,\ xyxz = yxzy;$ $(m38)$

$xyzt = tzyx,\ x^2y = y^2x,\ xy^2 = xy^3,\ xyxz = zxyz;$ $(m39)$

$xyzt = tzyx,\ x^2y = y^2x,\ xy^2 = xy^3,\ xyxz = yzyx;$ $(m40)$

$$xyzt = tzyx,\ x^2y = y^2x,\ xy^2 = xy^3,\ xyzx = yxzy; \qquad (m41)$$
$$xyzt = yxtz,\ x^2y = y^2x,\ xy^2 = (xy)^2; \qquad (m42)$$
$$xyzt = yxtz,\ x^2y = (xy)^2,\ xy^2 = yx^2; \qquad (m43)$$
$$xyzt = ztxy,\ x^2y = y^2x,\ xy^2 = (xy)^2,\ xyxz = yxzx; \qquad (m44)$$
$$xyzt = ztxy,\ x^2y = (xy)^2,\ xy^2 = yx^2,\ xyxz = yxzx; \qquad (m45)$$
$$xyzt = tzyx,\ x^2y = y^2x,\ xy^2 = (xy)^2,\ xyzx = yxzy; \qquad (m46)$$
$$xyzt = tzyx,\ x^2y = (xy)^2,\ xy^2 = yx^2,\ xyzx = yxzy. \qquad (m47)$$

Тогда решетка $L(\mathcal{V})$ дезаргова.

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{V}$ - многообразие полугрупп, удовлетворяющее одной из следующих систем тождеств:*

$$x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi},\ x^2y = y^2x,\ xyx = yxy\ (\pi \in \Pi_1); \qquad (\ell 1)$$
$$x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi},\ xy^2 = yx^2,\ xyx = yxy\ (\pi \in \Pi_1); \qquad (\ell 2)$$
$$x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi},\ x^2y = y^2x,\ xy^2 = yx^2\ (\pi \in \Pi_3); \qquad (\ell 3)$$
$$xyzt = ztxy,\ x^2y = y^2x,\ xy^2 = yx^2,\ xyxz = yxzx; \qquad (\ell 4)$$
$$xyzt = ztxy,\ x^2y = y^2x,\ xy^2 = yx^2,\ xyxz = yxyz; \qquad (\ell 5)$$
$$xyzt = ztxy,\ x^2y = y^2x,\ xy^2 = yx^2,\ xyzy = xzyz; \qquad (\ell 6)$$
$$xyzt = tzyx,\ x^2y = y^2x,\ xy^2 = yx^2,\ xyxz = xyzx; \qquad (\ell 7)$$
$$xyzt = tzyx,\ x^2y = y^2x,\ xy^2 = yx^2,\ xyxz = yxzy; \qquad (\ell 8)$$
$$xyzt = tzyx,\ x^2y = y^2x,\ xy^2 = yx^2,\ xyxz = zxyz; \qquad (\ell 9)$$
$$xyzt = tzyx,\ x^2y = y^2x,\ xy^2 = yx^2,\ xyxz = yzyx; \qquad (\ell 10)$$
$$xyzt = tzyx,\ x^2y = y^2x,\ xy^2 = yx^2,\ xyzx = yxzy. \qquad (\ell 11)$$

Тогда решетка $L(\mathcal{V})$ полумодулярна вниз.

Нумерация разделов в данной статье продолжает нумерацию разделов, начатую в работах [1, 2]. В данную статью входят разделы 5 и 6. Доказательство теорем 1 и 2 излагается в разделе 6. Оно основывается на технике, развитой авторами в работах [8, 9]. Нужные нам результаты этих работ воспроизведены в разделе 5.

5. Решетки нильмногообразий полугрупп и конгруэнции на G-множествах

Раздел делится на два подраздела. В подразделе 5.1 излагаются необходимые для дальнейшего результаты работы [8]. Эти результаты характеризуют строение решеток нильмногообразий в терминах конгруэнций на G-множествах. Необходимая информация о решетках конгруэнций G-множеств, бóльшая часть которой получена в [9], собрана в подразделе 5.2.

5.1. Решетки нильмногообразий

В данном подразделе под словом «полугруппа» понимается полугруппа с сигнатурным нулем. Тем не менее все сказанное ниже справедливо и для обычных полугрупповых многообразий, поскольку, как показано в [10], решетка нильмногообразий полугрупп с сигнатурным нулем изоморфна решетке нильмногообразий в обычной полугрупповой сигнатуре.

Прежде всего введем ряд обозначений. Всюду далее F – абсолютно свободная полугруппа над алфавитом $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$, элементы которого мы называем *буквами*, в то время как элементы F – *словами*. Символ $\equiv$ обозначает равенство в F. Если $u \in F \setminus \{0\}$, то $\ell(u)$ - длина слова u, $c(u)$ – множество всех букв, входящих в запись u, и $n(u) = |c(u)|$. Запись $u = 0$ обозначает систему тождеств $ux = xu = u$, где $x \notin c(u)$; если такая система тождеств выполнена в некотором многообразии $\mathcal{V}$, то мы говорим, что *слово* u *равно* 0 *в* $\mathcal{V}$. Напомним еще, что полугруппа с нулем называется *нильполугруппой*, если каждый ее элемент в некоторой степени равен нулю, а *нильмногообразием* называется многообразие, состоящее из нильполугрупп.

Пусть $\mathcal{V}$ – нильмногообразие, а m – натуральное число. Обозначим через $F_m(\mathcal{V})$ множество всех слов, зависящих в точности от букв $x_1, x_2, \ldots, x_m$ и не равных нулю в $\mathcal{V}$. Далее, пусть $W_m(\mathcal{V})$ – произвольное подмножество в $F_m(\mathcal{V})$ со следующим свойством: для каждого слова $u \in F_m(\mathcal{V})$ существует, и притом только одно, слово $u^* \in W_m(\mathcal{V})$ такое, что в $\mathcal{V}$ выполнено тождество $u = u^*$. Положим $W^0_m(\mathcal{V}) = W_m(\mathcal{V}) \cup \{0\}$. Множество $W_m(\mathcal{V})$ будем называть *большой трансверсалью*, а множество $W^0_m(\mathcal{V})$ – *большой* 0-*трансверсалью*.

Нам понадобится понятие G-множества. Пусть A – непустое множество, G – группа, а φ – гомоморфизм G в группу всех перестановок множества A. С каждым элементом $g \in G$ свяжем унарную операцию g^* на A, задаваемую правилом: $g^*(a) = (\varphi(g))(a)$ для всякого $a \in A$. Унарная алгебра с носителем A и множеством операций $\{g^* \mid g \in G\}$ называется *G-множеством*. Решетка конгруэнций G-множества A обозначается через $\mathrm{Con}(A)$.

Через $\mathbf{S}_m$ мы будем обозначать группу всех перестановок на множестве $\{1, 2, \ldots, m\}$. Если $u \in F \setminus \{0\}$, $c(u) = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ и $\sigma \in \mathbf{S}_m$, то через σu будем обозначать образ слова u при автоморфизме полугруппы F, индуцированном перестановкой σ, т. е. продолжающем отображение $x_i \longmapsto x_{i\sigma}$ (мы считаем, что $i\sigma = i$ при $i > m$). Ясно, что если $u \in F_m(\mathcal{V})$ и $\sigma \in \mathbf{S}_m$, то и $\sigma u \in F_m(\mathcal{V})$, и потому мы можем рассматривать слово $(\sigma u)^*$.

Зафиксируем произвольную большую трансверсаль $W_m(\mathcal{V})$ в $F_m(\mathcal{V})$ и для каждой перестановки $\sigma \in \mathbf{S}_m$ зададим унарную операцию σ^* на множестве $W^0_m(\mathcal{V})$ следующим правилом:

$$\sigma^*(u) \equiv (\sigma u)^* \text{ для всякого слова } u \in W_m(\mathcal{V}) \text{ и } \sigma^*(0) \equiv 0.$$

Легко проверить (см. [8, лемма 1]), что множество $W^0_m(\mathcal{V})$ с набором операций $\{\sigma^* \mid \sigma \in \mathbf{S}_m\}$ является $\mathbf{S}_m$-множеством.

Обозначим через ν вполне инвариантную конгруэнцию на F, отвечающую многообразию $\mathcal{V}$. Как хорошо известно, решетка $L(\mathcal{V})$ антиизоморфна главному коидеалу $[\nu)$ решетки всех вполне инвариантных конгруэнций на F. Для произвольной вполне инвариантной конгруэнции $\alpha \in [\nu)$ обозначим через α_m ограничение α на $W^0_m(\mathcal{V})$. Легко понять, что α_m – конгруэнция $\mathbf{S}_m$-множества $W^0_m(\mathcal{V})$ (см. [8, лемма 2]). Множество $C_m(\mathcal{V})$ всех конгруэнций вида α_m является подрешеткой в решетке $\mathrm{Con}(W^0_m(\mathcal{V}))$ (см. [8, лемма 3]). Следующее утверждение является основным результатом работы [8].

Предложение 5.1. *Решетка подмногообразий произвольного нильмногообразия $\mathcal{V}$ антиизоморфна подпрямому произведению решеток вида $C_m(\mathcal{V})$ по всем натуральным m.*

В случае когда $\mathcal{V}$ удовлетворяет некоторому дополнительному ограничению, строение решетки $C_m(\mathcal{V})$ можно уточнить. Пусть m и n – натуральные числа и $m \leqslant n$. Многообразие полугрупп $\mathcal{V}$ назовем *(n,m)-расщепляемым*, если из выполнимости в $\mathcal{V}$ тождества $u = v$, где $n(u) = m$, $\ell(u) = n$ и $\ell(v) > n$, вытекает, что в $\mathcal{V}$ выполнено тождество $u = 0$. Многообразие, являющееся (n,m)-расщепляемым для всех $n \geqslant m$, назовем *m-однородным*. *Наследственно m-однородным* будем называть многообразие, все подмногообразия которого m-однородны. Многообразие, которое наследственно m-однородно для всех натуральных m, будем называть *наследственно однородным*.

Обозначим через $W_{n,m}(\mathcal{V})$ множество всех слов из $W_m(\mathcal{V})$ длины n. Положим $W^0_{n,m}(\mathcal{V}) = W_{n,m}(\mathcal{V}) \cup \{0\}$. Множество $W_{n,m}(\mathcal{V})$ будем называть *трансверсалью*, а множество $W^0_{n,m}(\mathcal{V})$ – *0-трансверсалью*. Если m отлично от 1 и n, то $W_{n,m}(\mathcal{V})$ будем называть *собственной трансверсалью*, а $W^0_{n,m}(\mathcal{V})$ – *собственной 0-трансверсалью*.

Легко проверить, что если многообразие $\mathcal{V}$ (n,m)-расщепляемо (в частности, если оно m-однородно), то $W^0_{n,m}(\mathcal{V})$ и $W_{n,m}(\mathcal{V})$ являются $\mathbf{S}_m$-подмножествами в $W^0_m(\mathcal{V})$ и соответственно в $W_m(\mathcal{V})$ (это вытекает, например, из доказательства леммы 1.1 в [11]). Следующие два факта доказаны в [8].

Предложение 5.2. *Если $\mathcal{V}$ – наследственно m-однородное нильмногообразие, то решетка $C_m(\mathcal{V})$ антиизоморфна подпрямому произведению решеток вида $\mathrm{Con}(W^0_{n,m}(\mathcal{V}))$ по всем $n \geqslant m$.*

Следствие 5.1. *Если $\mathcal{V}$ – наследственно однородное многообразие полугрупп, то решетка $L(\mathcal{V})$ антиизоморфна подпрямому произведению решеток вида $\mathrm{Con}(W^0_{n,m}(\mathcal{V}))$ по всем m и n таким, что $n \geqslant m$.*

5.2. Конгруэнции на G-множествах

Напомним, что G-множество A называется *транзитивным*, если для любых $x, y \in A$ найдется элемент $g \in G$ такой, что $y = g^*(x)$. Пусть A - G-множество и $a \in A$. Множество $\mathrm{Stab}_A(a) = \{g \in G \,|\, g^*(a) = a\}$ называется *стабилизатором* элемента a в A. Как обычно, через $\mathrm{Sub}(G)$ будем обозначать решетку подгрупп группы G. Если x и y – элементы решетки L и $x \leqslant y$, то через $[x,\, y]$ обозначается интервал в L с наименьшим элементом x и наибольшим элементом y. Нам понадобится следующий хорошо известный факт (см., например, [12, лемма 4.20]).

Лемма 5.1. *Если G-множество A транзитивно и a – любой его элемент, то решетка* $\mathrm{Con}(A)$ *изоморфна интервалу* $[\mathrm{Stab}_A(a),\, G]$ *решетки* $\mathrm{Sub}(G)$.

Обозначим решетки, изображенные на рис. 1 и 2, соответственно через M_k и $M_{k,n}$. Квазимногообразия, порожденные решетками M_k и $M_{k,n}$, обозначим через $\mathbf{M}_k$ и $\mathbf{M}_{k,n}$ соответственно. Хорошо известно, что $\mathbf{M}_k$ в действительности является многообразием (см., например, [13, теорема 5.1.29]).

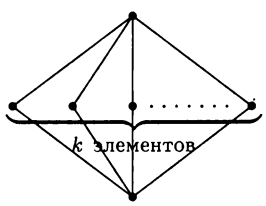

Рис. 1. Решетка M_k

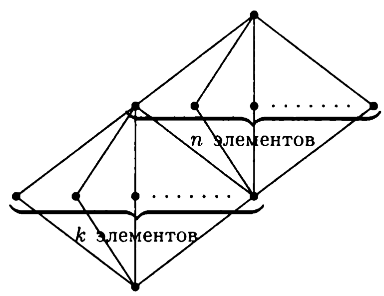

Рис. 2. Решетка $M_{k,n}$

Хорошо известно, что решетка подгрупп группы $\mathbf{S}_3$ изоморфна решетке M_4. Поэтому из леммы 5.1 вытекает следующий факт, который многократно будет использоваться в дальнейшем.

Следствие 5.2. *Если $m \leqslant 3$, то решетка конгруэнций транзитивного $\mathbf{S}_m$-множества лежит в $\mathbf{M}_4$.*

Транзитивное G-подмножество G-множества A называется *орбитой* этого G-множества. Множество всех орбит G-множества A будем обозначать через $\mathrm{Orb}(A)$. Пусть $\alpha \in \mathrm{Con}(A)$, а B и C - различные орбиты в A. Скажем, что:

α связывает B и C, если $x\alpha y$ для некоторых элементов $x \in B$ и $y \in C$;

α склеивает B и C, если $x\alpha y$ для любых элементов $x, y \in B \cup C$.

Конгруэнцию α будем называть *жадной*, если она склеивает любые две орбиты, которые она связывает. Совокупность всех жадных конгруэнций G-множества A будем обозначать через $\mathrm{GCon}(A)$. Нам понадобится следующий результат (см. [9, лемма 1.1 и предложение 1.2]).

Лемма 5.2. *Если A – произвольное G-множество, то $\mathrm{GCon}(A)$ – подрешетка решетки $\mathrm{Con}(A)$, изоморфная подпрямому произведению решеток конгруэнций всех орбит G-множества A и решетки эквивалентностей на множестве $\mathrm{Orb}(A)$.*

Пусть $\mathrm{Orb}(A) = \{A_i \mid i \in I\}$ и $\alpha \in \mathrm{GCon}(A)$. Обозначим через α_i проекцию конгруэнции α на орбиту A_i, а через α^* – отношение эквивалентности на множестве $\mathrm{Orb}(A)$, определяемое следующим образом: если $B, C \in \mathrm{Orb}(A)$, то $B\alpha^*C$ тогда и только тогда, когда либо $B = C$, либо α связывает B и C. Как обычно, решетку эквивалентностей на множестве X будем обозначать через $\mathrm{Eq}(X)$. Изоморфное вложение решетки $\mathrm{GCon}(A)$ в $\mathrm{Eq}(\mathrm{Orb}(A)) \times \prod\limits_{i\in I} \mathrm{Con}(A_i)$, найденное в [9], выглядит следующим образом: образом конгруэнции α является кортеж $(\alpha^*; \ldots, \alpha_i, \ldots)$.

Назовем *сегрегированным* G-множество, все конгруэнции которого являются жадными. Следующие два утверждения доказаны в [9].

Предложение 5.3. *Пусть A - G-множество, $\mathbf{L}$ - квазимногообразие модулярных решеток, содержащее многообразие $\mathbf{M}_3$. Решетка $\mathrm{Con}(A)$ лежит в $\mathbf{L}$ тогда и только тогда, когда A сегрегировано и имеет не более трех орбит, причем решетки конгруэнций всех орбит принадлежат $\mathbf{L}$.*

Предложение 5.4. *Решетка конгруэнций G-множества A полумодулярна вверх тогда и только тогда, когда решетки конгруэнций всех его орбит полумодулярны вверх и A сегрегировано.*

Нам будет полезно следующее очевидное достаточное условие сегрегированности G-множества.

Лемма 5.3. *Если G-множество содержит не более одной неодноэлементной орбиты, то оно сегрегировано.*

6. Доказательство теорем 1 и 2

Раздел делится на 12 подразделов. В подразделе 6.1 доказательство теорем 1 и 2 сводится к случаю нильмногообразий. В подразделе 6.2 приводятся общие замечания, относящиеся к рассмотрению этого случая, вводится ряд обозначений и доказываются некоторые вспомогательные факты. Подразделы 6.3–6.11 посвящены конкретным нильмногообразиям, задаваемым системами тождеств из теорем 1 и 2. В подразделе 6.12 доказываются некоторые следствия основных результатов.

6.1. Редукция к нильмногообразиям

Пусть $\mathcal{V}$ – многообразие полугрупп, удовлетворяющее одной из систем тождеств $(m1)$–$(m47)$ или $(\ell 1)$–$(\ell 11)$.

Если $\mathcal{V}$ удовлетворяет системе тождеств $(m1)$, то дезарговость решетки $L(\mathcal{V})$ доказана в работе [7].

Из леммы 15 работы [6] вытекает

Лемма 6.1. *Если многообразие полугрупп $\mathcal{V}$ удовлетворяет одной из систем тождеств $(m2)$ или $(m3)$, то решетка $L(\mathcal{V})$ вложима в прямое произведение 4-элементной цепи и решетки $L(\mathcal{X})$ для некоторого вполне регулярного многообразия полугрупп $\mathcal{X}$, содержащегося в $\mathcal{V}$.*

Поскольку решетка всех вполне регулярных многообразий полугрупп дезаргова (см., например, [14]), из леммы 6.1 вытекает дезарговость решетки подмногообразий многообразия полугрупп, удовлетворяющего одной из систем тождеств $(m2)$ или $(m3)$.

Перейдем к рассмотрению случая, когда $\mathcal{V}$ удовлетворяет системе тождеств $(m4)$. Тождество вида

$$x_1x_2\cdots x_n = x_{1\pi}x_{2\pi}\cdots x_{n\pi}, \tag{6.1}$$

где π – нетривиальная перестановка из $\mathbf{S}_n$, называется *перестановочным.* Многообразие называется *перестановочным*, если оно удовлетворяет перестановочному тождеству. Напомним еще, что через S^1 обозначается полугруппа, получаемая внешним присоединением единицы к полугруппе S. Нам понадобится следующая лемма, вытекающая из результатов работы [15], доказательства предложения 1 работы [4] и того факта, что в перестановочном многообразии полугрупп все моноиды коммутативны.

Лемма 6.2. *Если перестановочное многообразие полугрупп $\mathcal{V}$ удовлетворяет квазитождеству*

$$e^2 = e \longrightarrow ex = xe, \tag{6.2}$$

то $\mathcal{V} = \mathcal{A} \vee \mathcal{K} \vee \mathcal{M}$, где $\mathcal{A}$ – многообразие периодических абелевых групп, $\mathcal{K}$ – многообразие, порожденное всеми лежащими в $\mathcal{V}$ полугруппами вида N^1, где N – нильполугруппа (если $\mathcal{V}$ не содержит таких полугрупп, то $\mathcal{K}$ тривиально), а $\mathcal{M}$ – наибольшее нильмногообразие, содержащееся в $\mathcal{V}$.

Если u и v – полугрупповые слова, то запись $u \lhd v$ означает, что $v \equiv a\xi(u)b$ для некоторых (возможно, пустых) слов a и b и некоторого эндоморфизма ξ полугруппы F. Напомним, что многообразие полугрупп называется *локально нильпотентным*, если всякая его конечнопорожденная полугруппа нильпотентна. Ясно, что всякое локально нильпотентное многообразие состоит из нильполугрупп. В дальнейшем мы будем часто использовать следующие четыре замечания о тождествах нильмногообразий. Первые два из этих замечаний очевидны, третье вытекает из леммы 1 работы [16], четвертое доказано в [17, лемма 1.3].

Лемма 6.3. *Пусть $\mathcal{V}$ – нильмногообразие.*

(i) *Если $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству $u = v$ такому, что $c(u) \neq c(v)$, то $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству $u = 0$.*

(ii) *Если $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству вида $x^n = x^m$, где $n < m$, то $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству $x^n = 0$.*

(iii) *Если $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству вида $x_1x_2\cdots x_n = v$ такому, что $\ell(v) \neq n$, то $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству $x_1x_2\cdots x_n = 0$.*

(iv) *Если $\mathcal{V}$ локально нильпотентно и удовлетворяет тождеству $u = v$ такому, что $\ell(u) < \ell(v)$ и $u \lhd v$, то $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству $u = 0$.*

Отметим, что каждая из систем тождеств ($m4$)–($m47$) и ($\ell1$)–($\ell11$) содержит перестановочное тождество. Хорошо известно, что всякое перестановочное нильмногообразие локально нильпотентно. Это позволяет нам в дальнейшем при рассмотрении нильмногообразий применять четвертое утверждение леммы 6.3 без специальных оговорок.

Через $\operatorname{var}\Sigma$ мы обозначаем многообразие полугрупп, заданное системой тождеств Σ, а через $\operatorname{var} S$ – многообразие полугрупп, порожденное полугруппой S. Мы будем использовать далее следующие обозначения для конкретных многообразий полугрупп:

$$\mathcal{SL} = \operatorname{var}\{x^2 = x,\ xy = yx\}, \quad \mathcal{C} = \operatorname{var}\{x^2 = x^3,\ xy = yx\},$$
$$\mathcal{M}_\omega = \operatorname{var}\{x^2y = xyx = yx^2 = 0\}, \quad \mathcal{T} = \operatorname{var}\{x = y\}.$$

В [5] доказана

Лемма 6.4. *Решетка $L(\mathcal{C} \vee \mathcal{M}_\omega)$ изоморфна подпрямому произведению решетки $L(\mathcal{M}_\omega)$ и 3-элементной цепи.*

Пусть теперь $\mathcal{V}$ – многообразие полугрупп, удовлетворяющее системе тождеств $(m4)$, а $\mathcal{M}$ – его наибольшее нильподмногообразие (которое существует, поскольку $\mathcal{V}$ – периодическое многообразие).

Лемма 6.5. *Решетка $L(\mathcal{V})$ изоморфна подпрямому произведению решетки $L(\mathcal{M})$ и некоторой дистрибутивной решетки.*

Доказательство. Из того, что система тождеств $(m4)$ содержит тождество $x^2y = yx^2$, вытекает, что $\mathcal{V}$ удовлетворяет квазитождеству (6.2). В силу леммы 6.2 $\mathcal{V} = \mathcal{A} \vee \mathcal{K} \vee \mathcal{M}$, где $\mathcal{A}$, $\mathcal{K}$ и $\mathcal{M}$ имеют указанный в этой лемме смысл. Предположим, что существует нильполугруппа N такая, что $N^1 \in \mathcal{V}$ и $|N| > 1$. В $\mathcal{V}$ выполнено тождество $x^2y = x^{n+2}y$. Подставляя в него 1 вместо y, мы получаем, что $x^2 = x^{n+2}$ в N^1, а значит и в N. В силу второго утверждения леммы 6.3 N удовлетворяет тождеству $x^2 = 0$, и потому $x^2 = x^3$ в N^1. Кроме того, полугруппа N^1 коммутативна в силу перестановочности $\mathcal{V}$. Таким образом, $N^1 \in \mathcal{C}$. Как хорошо известно, $\mathcal{C} = \operatorname{var} C^1$, где C – 2-элементная нильполугруппа (см., например, [18]). Таким образом, в рассматриваемом случае $\mathcal{K} = \mathcal{C}$. Учитывая, что одноэлементная полугруппа с внешне присоединенной единицей есть 2-элементная полурешетка, получаем, что в общем случае $\mathcal{K}$ – одно из многообразий $\mathcal{C}$, $\mathcal{SL}$ и $\mathcal{T}$. Кроме того, из вида системы $(m4)$ и четвертого утверждения леммы 6.3 вытекает, что $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}_\omega$. Из предложения 2 работы [19] вытекает, что $L(\mathcal{V}) \cong L(\mathcal{A}) \times L(\mathcal{K} \vee \mathcal{M})$. Как хорошо известно, решетка многообразий периодических абелевых групп дистрибутивна. Поскольку $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}_\omega$, остается сослаться на лемму 6.4.

В силу леммы 6.5 для того, чтобы доказать дезарговость решетки $L(\mathcal{V})$, достаточно установить дезарговость решетки $L(\mathcal{M})$. При этом $\mathcal{M}$ удовлетворяет тождествам $x^2y = xyx = yx^2 = 0$ (в силу четвертого утверждения леммы 6.3) и тождеству вида

$$x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi} \qquad (6.3)$$

для некоторой перестановки $\pi \in \Pi_1$, а значит и системе тождеств $(m5)$.

Таким образом, далее мы можем предполагать, что $\mathcal{V}$ удовлетворяет одной из систем тождеств $(m5)$–$(m47)$ или $(\ell1)$–$(\ell11)$. Введем обозначения для некоторых многообразий полугрупп: $\mathcal{LZ}$ (соответственно $\mathcal{RZ}$) – многообразие всех полугрупп левых (правых) нулей; $\mathcal{P} = \operatorname{var}\{xy = x^2y,\ x^2y^2 = y^2x^2\}$; $\mathcal{P}^*$ – многообразие, двойственное к $\mathcal{P}$. Если u – слово, а x – буква, то через $\ell_x(u)$ обозначается число вхождений x в u, а через $h(u)$ (соответственно $t(u)$) – первая (последняя) буква в u. Нам понадобится следующая лемма, первые два утверждения которой хорошо известны и легко проверяемы, а третье доказано в [20].

Лемма 6.6. *Тождество* $u = v$ *выполнено*

(i) *в многообразии* $\mathcal{C}$ *тогда и только тогда, когда* $c(u) = c(v)$ *и для всякой буквы* $x \in c(u)$ *либо* $\ell_x(u), \ell_x(v) > 1$, *либо* $\ell_x(u) = \ell_x(v) = 1$;

(ii) *в многообразии* $\mathcal{LZ}$ *тогда и только тогда, когда* $h(u) \equiv h(v)$;

(iii) *в многообразии* $\mathcal{P}$ *тогда и только тогда, когда* $c(u) = c(v)$ *и либо* $\ell_{t(u)}(u), \ell_{t(v)}(v) > 1$, *либо* $\ell_{t(u)}(u) = \ell_{t(v)}(v) = 1$ *и* $t(u) \equiv t(v)$.

Следующее утверждение легко вытекает, например, из результатов [21].

Лемма 6.7. *Если* $\mathcal{M}$ *- многообразие полугрупп, не содержащее* $\mathcal{SL}$, *то решетка* $L(\mathcal{SL} \vee \mathcal{M})$ *изоморфна прямому произведению решетки* $L(\mathcal{M})$ *и 2-элементной цепи.*

Лемма 6.8. *Если многообразие полугрупп* $\mathcal{V}$ *удовлетворяет одной из систем тождеств* $(m5)$-$(m47)$ *или* $(\ell1)$-$(\ell11)$, *то либо* $\mathcal{V}$ *- нильмногообразие, либо решетка* $L(\mathcal{V})$ *изоморфна прямому произведению 2-элементной цепи и решетки* $L(\mathcal{M})$ *для некоторого нильмногообразия* $\mathcal{M}$, *содержащегося в* $\mathcal{V}$.

Доказательство. Из леммы 6.6 и двойственного утверждения без труда выводится, что многообразие, заданное любой из систем тождеств $(m5)$-$(m47)$ и $(\ell1)$-$(\ell11)$, не содержит многообразий $\mathcal{LZ}$, $\mathcal{RZ}$, $\mathcal{P}$ и $\mathcal{P}^*$. Отсюда и из леммы 2 работы [4] вытекает, что $\mathcal{V}$ удовлетворяет квазитождеству (6.2). Кроме того, каждая из систем $(m5)$-$(m47)$ и $(\ell1)$-$(\ell11)$ содержит перестановочное тождество. В силу леммы 6.2 $\mathcal{V} = \mathcal{A} \vee \mathcal{K} \vee \mathcal{M}$, где $\mathcal{A}$, $\mathcal{K}$ и $\mathcal{M}$ имеют указанный в этой лемме смысл. Легко убедиться в том, что каждая из систем $(m5)$-$(m47)$ и $(\ell1)$-$(\ell11)$ влечет тождество $x^6 = x^7$. Следовательно, многообразие $\mathcal{A}$ тривиально. Далее, из леммы 6.6 легко вытекает, что $\mathcal{C} \nsubseteq \mathcal{K}$. Как уже отмечалось выше, $\mathcal{C} = \operatorname{var} C^1$, где C - 2-элементная нильполугруппа. Следовательно, многообразие $\mathcal{K}$ либо тривиально, либо порождается одноэлементной полугруппой с внешне присоединенной единицей, т. е. 2-элементной полурешеткой. Иными словами, $\mathcal{K}$ – одно из многообразий $\mathcal{SL}$ и $\mathcal{T}$. В первом случае $\mathcal{V} = \mathcal{M}$ (в частности, $\mathcal{V}$ – нильмногообразие), а во втором $\mathcal{V} = \mathcal{SL} \vee \mathcal{M}$. Остается сослаться на лемму 6.7.

Пусть теперь $\mathcal{V}$ - многообразие полугрупп, удовлетворяющее одной из систем тождеств $(m5)$-$(m47)$ или $(\ell1)$-$(\ell11)$. В силу леммы 6.8 дезарговость решетки $L(\mathcal{V})$ эквивалентна дезарговости решетки $L(\mathcal{M})$. Следующий известный факт (см., например, [22, теорема 1.7.6]) показывает, что аналогичная эквивалентность имеет место и для полумодулярности вниз.

Лемма 6.9. *Подпрямое произведение полумодулярных вверх (вниз) решеток само является полумодулярной вверх (вниз) решеткой.*

Таким образом, всюду далее можно считать, что $\mathcal{V}$ – нильмногообразие, удовлетворяющее одной из систем тождеств $(m5)$–$(m47)$ или $(\ell 1)$–$(\ell 11)$.

6.2. Нильмногообразия: предварительные замечания

Нам осталось доказать следующие два утверждения:

(I) *нильмногообразие, удовлетворяющее одной из систем тождеств* $(m5)$-$(m47)$, *имеет дезаргову решетку подмногообразий*;

(II) *нильмногообразие, удовлетворяющее одной из систем тождеств* $(\ell 1)$-$(\ell 11)$, *имеет полумодулярную вниз решетку подмногообразий.*

В действительности, как мы увидим ниже, справедливо утверждение более сильное, чем (I): если нильмногообразие $\mathcal{V}$ удовлетворяет одной из систем тождеств $(m5)$–$(m47)$, то $L(\mathcal{V}) \in \mathbf{M}_{4,3}$ (это немедленно влечет утверждение (I), поскольку решетка $M_{4,3}$ дезаргова). В данном подразделе излагаются предварительные соображения, необходимые для доказательства (I) и (II).

Нам понадобится ряд обозначений. Предположим, что множество $C_m(\mathcal{V})$ состоит только из жадных конгруэнций $\mathbf{S}_m$-множества $W_m^0(\mathcal{V})$, т. е. что $C_m(\mathcal{V})$ является подрешеткой в $\mathrm{GCon}(W_m^0(\mathcal{V}))$. Тогда по лемме 5.2 решетка $C_m(\mathcal{V})$ изоморфна некоторой подрешетке C прямого произведения решеток конгруэнций орбит $\mathbf{S}_m$-множества $W_m^0(\mathcal{V})$ и решетки эквивалентностей на множестве всех его орбит. Проекцию C на решетку $\mathrm{Eq}(\mathrm{Orb}(W_m^0(\mathcal{V})))$ обозначим через $E_m(\mathcal{V})$, а проекцию C на решетку конгруэнций орбиты U – через $C_m^U(\mathcal{V})$.

Любая конгруэнция $\alpha \in C_m(\mathcal{V})$ есть ограничение на $W_m^0(\mathcal{V})$ некоторой вполне инвариантной конгруэнции $\overline{\alpha}$ на полугруппе F, содержащей вполне инвариантную конгруэнцию на F, отвечающую многообразию $\mathcal{V}$. Пусть $\mathcal{V}_\alpha$ – подмногообразие в $\mathcal{V}$, отвечающее $\overline{\alpha}$. Далее, пусть α^* – эквивалентность на множестве всех орбит $\mathbf{S}_m$-множества $W_m^0(\mathcal{V})$, соответствующая конгруэнции α при вложении $C_m(\mathcal{V})$ в прямое произведение решеток конгруэнций орбит $\mathbf{S}_m$-множества $W_m^0(\mathcal{V})$ и решетки эквивалентностей на множестве всех его орбит. Пусть U и V – различные орбиты в $W_m^0(\mathcal{V})$. Согласно комментарию к лемме 5.2, $U\alpha^*V$ тогда и только тогда, когда α связывает U и V, т. е. когда $u\alpha v$ для некоторых слов $u \in U$ и $v \in V$. Но тогда $u\overline{\alpha}v$, т. е. $u = v$ в $\mathcal{V}_\alpha$. Обратно, если в $\mathcal{V}_\alpha$ выполнено тождество $u = v$, где $u, v \in W_m^0(\mathcal{V})$, то $u\alpha v$ и потому $U\alpha^*V$, где U – орбита, содержащая u, а V – орбита, содержащая v.

Запись $u \overset{\mathcal{V}}{\lhd} v$ будет означать, что $u \lhd w$ для некоторого слова w, равного v в многообразии $\mathcal{V}$. Пусть U и V – орбиты $\mathbf{S}_m$-множества $W_m(\mathcal{V})$. Ясно, что если $u \overset{\mathcal{V}}{\lhd} v$ для некоторых слов $u \in U$ и $v \in V$, то $u' \overset{\mathcal{V}}{\lhd} v'$ для любых $u' \in U$ и $v' \in V$. В этой ситуации будем писать $U \lhd V$. Далее, всегда можно считать, что произвольная орбита $U \neq \{0\}$ в $W_m(\mathcal{V})$ состоит из слов одинаковой длины. Будем обозначать эту длину через $\ell(U)$.

Орбиту $\{0\}$ большой 0-трансверсали $W_m^0(\mathcal{V})$ будем обозначать через U_0. Если $W_m(\mathcal{V}) \neq \varnothing$, то одной из орбит этого $\mathbf{S}_m$-множества всегда является множество всех входящих в $W_m(\mathcal{V})$ слов длины m от букв $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Договоримся обозначать эту орбиту через U_1. Заметим, что $U_1 \lhd U$ и $\ell(U_1) < \ell(U)$ для любой орбиты U $\mathbf{S}_m$-множества $W_m^0(\mathcal{V})$, отличной от U_0 и U_1.

В следующей лемме первое утверждение очевидно, а второе и третье вытекают из третьего и четвертого утверждений леммы 6.3 соответственно.

Лемма 6.10. *Пусть $\mathcal{V}$ – нильмногообразие, а m – натуральное число такое, что $W_m(\mathcal{V}) \neq \varnothing$ и каждая конгруэнция из $C_m(\mathcal{V})$ является жадной. Пусть $\alpha \in C_m(\mathcal{V})$, а $\mathrm{Orb}(W_m^0(\mathcal{V})) = \{U_0, U_1, \ldots, U_k\}$.*

(i) *Если $U_i \alpha^* U_0$ и $U_i \lhd U_j$ для некоторых $i, j \geqslant 1$, то $U_j \alpha^* U_0$.*

(ii) *Если $U_1 \alpha^* U_i$ для некоторого $i \neq 1$, то α^* – универсальное отношение на $\mathrm{Orb}(W_m^0(\mathcal{V}))$.*

(iii) *Если $\mathcal{V}$ локально нильпотентно, $U_i \alpha^* U_j$, $U_i \lhd U_j$ и $\ell(U_i) < \ell(U_j)$ для некоторых $i, j \geqslant 1$, $i \neq j$, то $U_i \alpha^* U_0$.*

В условиях леммы 6.10 обозначим через $E'_m(\mathcal{V})$ множество всех отношений эквивалентности α^* из $E_m(\mathcal{V})$ таких, что $\{U_1\}$ является α^*-классом. Ясно, что $E'_m(\mathcal{V})$ – подрешетка в $E_m(\mathcal{V})$. Из второго утверждения леммы 6.10 вытекает

Следствие 6.1. *Пусть $\mathcal{V}$ – нильмногообразие, а m – натуральное число такое, что $W_m(\mathcal{V}) \neq \varnothing$ и каждая конгруэнция из $C_m(\mathcal{V})$ является жадной. Тогда решетка $E_m(\mathcal{V})$ получается внешним присоединением единицы к решетке $E'_m(\mathcal{V})$.*

Пусть по-прежнему $\mathrm{Orb}(W_m^0(\mathcal{V})) = \{U_0, U_1, \ldots, U_k\}$. Зафиксируем следующие обозначения для некоторых эквивалентностей на этом множестве:

ε – отношение равенства;

$\rho_{i_1 i_2 \ldots i_r}$ – эквивалентность, единственным неодноэлементным классом которой является $\{U_{i_1}, U_{i_2}, \ldots, U_{i_r}\}$;

$\rho_{i_1 i_2 \ldots i_r, j_1 j_2 \ldots j_s}$ – эквивалентность, имеющая ровно два неодноэлементных класса: $\{U_{i_1}, U_{i_2}, \ldots, U_{i_r}\}$ и $\{U_{j_1}, U_{j_2}, \ldots, U_{j_s}\}$;

$\Delta = \rho_{023\ldots k}$.

Ясно, что Δ – наибольший элемент решетки $E'_m(\mathcal{V})$.

Нам понадобится следующий факт, вытекающий из четвертого утверждения леммы 6.3.

Лемма 6.11. *Пусть $\mathcal{V}$ – локально нильпотентное многообразие, а m – натуральное число. Если для любых двух неодноэлементных орбит U и V $\mathbf{S}_m$-множества $W_m^0(\mathcal{V})$ либо $\ell(U) < \ell(V)$ и $U \lhd V$, либо $\ell(V) < \ell(U)$ и $V \lhd U$, то каждая конгруэнция из $C_m(\mathcal{V})$ является жадной.*

Следующая лемма проверена в [8, лемма 11]:

Лемма 6.12. *Решетка $C_1(\mathcal{V})$ дистрибутивна, если $\mathcal{V}$ – нильмногообразие.*

Из третьего утверждения леммы 6.3 вытекает, что произвольное нильмногообразие (n,n)-расщепляемо для всякого натурального n. В частности, множество $W_{n,n}^0(\mathcal{V})$ всегда является $\mathbf{S}_n$-множеством.

Лемма 6.13. *Пусть $\mathcal{V}$ – нильмногообразие, удовлетворяющее тождеству вида* (6.3) *для некоторой перестановки $\pi \in \Pi_1$, а n – натуральное число. Тогда* $\mathrm{Con}(W_{n,n}^0(\mathcal{V})) \in \mathbf{M}_{3,4}$.

Доказательство. Положим $W_n = W_{n,n}(\mathcal{V})$ и $W_n^0 = W_{n,n}^0(\mathcal{V})$. Можно считать, что $W_n \neq \varnothing$, так как в противном случае $W_n^0 = \{0\}$ и решетка $\mathrm{Con}(W_n^0)$ одноэлементна. Ясно, что W_n является транзитивным $\mathbf{S}_n$-множеством. Следовательно, 0-трансверсаль W_n^0 состоит из двух орбит: $\{0\}$ и W_n, и потому ее сегрегированность вытекает из леммы 5.3. В силу предложения 5.3 осталось проверить, что $\mathrm{Con}(W_n) \in \mathbf{M}_{3,4}$. Без ограничения общности можно считать, что W_n содержит слово $x_1x_2\cdots x_n$. Обозначим через $\mathrm{Perm}_n(\mathcal{V})$ множество всех перестановок $\pi \in \mathbf{S}_n$ таких, что в $\mathcal{V}$ выполнено тождество (6.1). Ясно, что $\mathrm{Perm}_n(\mathcal{V})$ – подгруппа в $\mathbf{S}_n$. Несложно проверяется, что $\mathrm{Stab}_{W_n}(x_1x_2\cdots x_n) = \mathrm{Perm}_n(\mathcal{V})$ (см., например, доказательство следствия 1.7 в [17]). В силу леммы 5.1 $\mathrm{Con}(W_n) \cong [\mathrm{Perm}_n(\mathcal{V}), \mathbf{S}_n]$.

Обозначим через $\mathbf{A}_n$ знакопеременную подгруппу в $\mathbf{S}_n$. Кроме того, для всякого $i = 1, 2, \ldots, n$ положим $\mathrm{Stab}_n(i) = \{\sigma \in \mathbf{S}_n \mid i\sigma = i\}$. Ясно, что $\mathrm{Stab}_n(i)$ – подгруппа в $\mathbf{S}_n$. Напомним, что по условию $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству вида (6.3) для некоторой перестановки $\pi \in \Pi_1$. Если $n \geqslant 5$, то из результатов работы [23] вытекает, что $\mathrm{Perm}_n(\mathcal{V})$ содержит одну из групп $\mathbf{A}_n$, $\mathrm{Stab}_n(1)$ и $\mathrm{Stab}_n(n)$. Как хорошо известно, все эти три группы являются максимальными собственными подгруппами в $\mathbf{S}_n$. Следовательно, в рассматриваемом случае $\mathrm{Con}(W_n) \in \mathbf{M}_{3,4}$. В силу следствия 5.2 осталось рассмотреть случай, когда $n = 4$. Если $\pi \in \mathbf{S}_4$, то через $\mathrm{gr}\{\pi\}$ мы будем обозначать подгруппу в $\mathbf{S}_4$, порожденную перестановкой π. По условию группа $\mathrm{Perm}_4(\mathcal{V})$ содержит некоторую перестановку $\pi \in \Pi_1$. Следовательно, $\mathrm{Con}(W_4)$ – интервал в решетке $[\mathrm{gr}\{\pi\}, \mathbf{S}_4]$, где $\pi \in \Pi_1$. Введем следующие обозначения для подгрупп группы $\mathbf{S}_4$:

$$C_{ijk} = \mathrm{gr}\{(ijk)\}, \text{ где } 1 \leqslant i < j < k \leqslant 4;$$
$$C_{ijk\ell} = \mathrm{gr}\{(ijk\ell)\}, \text{ где } \{i,j,k,\ell\} = \{1,2,3,4\};$$
$$P_{ij,k\ell} = \mathrm{gr}\{(ij)(k\ell)\}, \text{ где } \{i,j,k,\ell\} = \{1,2,3,4\};$$
$$T_{ij} = \mathrm{gr}\{(ij)\}, \text{ где } 1 \leqslant i < j \leqslant 4;$$
$$\mathbf{V}_4 \text{ – четверная группа Клейна.}$$

Ясно, что если $\pi \in \Pi_1$, то $\mathrm{gr}\{\pi\}$ совпадает с одной из групп C_{ijk} и $P_{ij,k\ell}$. На рис. 3 и 4 изображены интервалы $[C_{ijk}, \mathbf{S}_4]$ и $[P_{ij,k\ell}, \mathbf{S}_4]$ соответственно (на рис. 3 $\{i,j,k,\ell\} = \{1,2,3,4\}$). Мы видим, что они лежат в $\mathbf{M}_{3,4}$. Следовательно, $\mathrm{Con}(W_4) \in \mathbf{M}_{3,4}$.

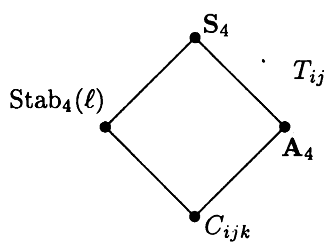

Рис. 3. Интервал $[C_{ijk}, \mathbf{S}_4]$

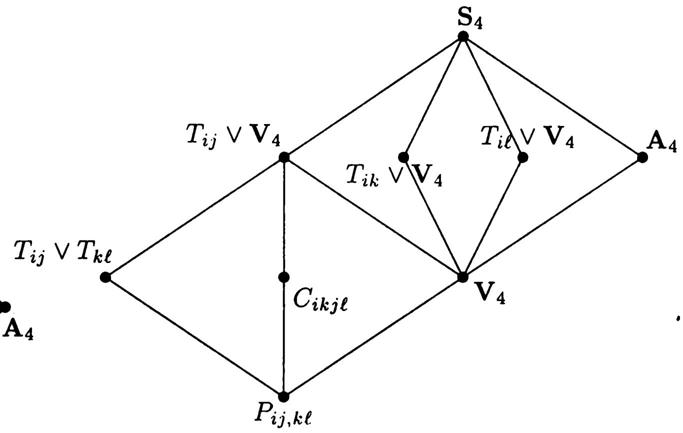

Рис. 4. Интервал $[P_{ij,k\ell}, \mathbf{S}_4]$

Если $\mathbf{L}$ – квазимногообразие решеток, то через $\mathbf{L}^\partial$ мы будем обозначать квазимногообразие, двойственное к $\mathbf{L}$. Все наши рассуждения в подразделах 6.3–6.11 будут опираться на следующие два утверждения.

Лемма 6.14. *Пусть $\mathcal{V}$ – нильмногообразие, а $\mathbf{L}$ – квазимногообразие модулярных решеток, содержащее $\mathbf{M}_3$. Предположим, что $\mathrm{Con}(W^0_{n,n}(\mathcal{V})) \in \mathbf{L}^\partial$ для всякого натурального n, а для всякого натурального $m > 1$ выполнено по крайней мере одно из следующих двух утверждений:*

(i) *многообразие $\mathcal{V}$ наследственно m-однородно и для любого натурального $n > m$ либо $W_{n,m}(\mathcal{V}) = \varnothing$, либо $\mathbf{S}_m$-множество $W_{n,m}(\mathcal{V})$ сегрегировано и содержит не более двух орбит, а решетки конгруэнций всех его орбит лежат в $\mathbf{L}^\partial$;*

(ii) *решетка* $C_m(\mathcal{V})$ *состоит только из жадных конгруэнций* $\mathbf{S}_m$*-множества* $W_m^0(\mathcal{V})$, *и если* $W_m(\mathcal{V}) \neq \varnothing$, *то решетки* $E_m'(\mathcal{V})$ *и* $C_m^U(\mathcal{V})$ *(где* U *– произвольная орбита* $\mathbf{S}_m$*-множества* $W_m(\mathcal{V})$*) лежат в* $\mathbf{L}^\partial$.

Тогда $L(\mathcal{V}) \in \mathbf{L}$.

Доказательство. В силу предложения 5.1 нам достаточно показать, что $C_m(\mathcal{V}) \in \mathbf{L}^\partial$ для всякого натурального m. Лемма 6.12 позволяет считать, что $m > 1$.

Предположим сначала, что выполнено условие (i). В силу предложения 5.2 в этом случае достаточно проверить, что $\mathrm{Con}(W_{n,m}^0(\mathcal{V})) \in \mathbf{L}^\partial$ для всякого $n \geqslant m$. По условию можно считать, что $n > m$. Кроме того, можно считать, что $W_{n,m}(\mathcal{V}) \neq \varnothing$, поскольку в противном случае $W_{n,m}^0(\mathcal{V}) = \{0\}$ и решетка $\mathrm{Con}(W_{n,m}^0(\mathcal{V}))$ одноэлементна. 0-трансверсаль $W_{n,m}^0(\mathcal{V})$ является объединением трансверсали $W_{n,m}(\mathcal{V})$ и одноэлементной орбиты $\{0\}$. Ясно, что добавление к G-множеству любого числа одноэлементных орбит сохраняет как сегрегированность исходного G-множества, так и квазитождества решеток конгруэнций его орбит. Кроме того, очевидно, что если $W_{n,m}(\mathcal{V})$ имеет не более двух орбит, то $W_{n,m}^0(\mathcal{V})$ имеет не более трех орбит. В силу предложения 5.3 из условия (i) вытекает, что в рассматриваемом случае $\mathrm{Con}(W_{n,m}^0(\mathcal{V})) \in \mathbf{L}^\partial$.

Осталось рассмотреть случай, когда выполнено условие (ii). В этом случае $C_m(\mathcal{V})$ – подрешетка в $\mathrm{GCon}(W_m^0(\mathcal{V}))$. Из леммы 5.2 вытекает, что $C_m(\mathcal{V})$ вкладывается в прямое произведение $E_m(\mathcal{V})$ и решеток вида $C_m^U(\mathcal{V})$, где U пробегает множество всех орбит $\mathbf{S}_m$-множества $W_m^0(\mathcal{V})$. В силу следствия 6.1 из того, что $E_m'(\mathcal{V})$ лежит в $\mathbf{L}^\partial$, вытекает, что и $E_m(\mathcal{V})$ лежит в $\mathbf{L}^\partial$. Из условия (ii) и того факта, что решетка конгруэнций орбиты $\{0\}$ одноэлементна, вытекает, что $C_m(\mathcal{V}) \in \mathbf{L}^\partial$.

Лемма 6.15. *Пусть* $\mathcal{V}$ *– нильмногообразие. Предположим, что решетка* $\mathrm{Con}(W_{n,n}^0(\mathcal{V}))$ *полумодулярна вверх для всякого натурального* n, *а для всякого натурального* $m > 1$ *выполнено по крайней мере одно из следующих двух утверждений:*

(i) *многообразие* $\mathcal{V}$ *наследственно* m*-однородно и для любого натурального* $n > m$ *либо* $W_{n,m}(\mathcal{V}) = \varnothing$, *либо* $\mathbf{S}_m$*-множество* $W_{n,m}(\mathcal{V})$ *сегрегировано, а решетки конгруэнций всех его орбит полумодулярны вверх;*

(ii) *решетка* $C_m(\mathcal{V})$ *состоит только из жадных конгруэнций* $\mathbf{S}_m$*-множества* $W_m^0(\mathcal{V})$, *и если* $W_m(\mathcal{V}) \neq \varnothing$, *то решетки* $E_m'(\mathcal{V})$ *и* $C_m^U(\mathcal{V})$ *(где* U *– произвольная орбита* $\mathbf{S}_m$*-множества* $W_m(\mathcal{V})$*) полумодулярны вверх.*

Тогда решетка $L(\mathcal{V})$ *полумодулярна вниз.*

Доказательство. Эта лемма проверяется абсолютно аналогично предыдущей. Надо только дополнительно учесть лемму 6.9 и вместо предложения 5.3 сослаться на предложение 5.4.

Перед тем как переходить к конкретным вычислениям, примем еще одно терминологическое соглашение. Пусть Σ – одна из систем тождеств $(m5)$–$(m47)$ или $(\ell 1)$–$(\ell 11)$. Очевидно, что многообразие $\operatorname{var}\Sigma$ состоит из периодических полугрупп, и потому среди его нильподмногообразий есть наибольшее. В дальнейшем мы, допуская некоторую вольность, будем говорить «нильмногообразие, заданное системой Σ», имея в виду «наибольшее нильмногообразие, удовлетворяющее системе тождеств Σ».

6.3. Система тождеств $(m5)$

Пусть $\mathcal{V}$ – нильмногообразие, заданное системой тождеств $(m5)$. В эту систему входит тождество $x^6 = x^7$. В силу второго утверждения леммы 6.3 во всяком нильмногообразии это тождество влечет $x^6 = 0$. Поэтому на протяжении данного подраздела можно считать, что $\mathcal{V}$ – многообразие, заданное тождествами

$$x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi},\ x^2y = xyx = yx^2,\ x^3yz = xy^3z,\ x^6 = 0,$$

где $\pi \in \Pi_1$.

Будем говорить, что слова u и v *подобны в многообразии* $\mathcal{X}$, если существует слово w такое, что в $\mathcal{X}$ выполнено тождество $u = w$ и v может быть получено из w переименованием переменных. Если u подобно v в $\mathcal{X}$, будем писать $u \overset{\mathcal{X}}{\approx} v$.

Подставляя yz вместо y и t вместо z в тождество $x^3yz = xy^3z$ и используя тождества $x^2y = xyx = yx^2$, имеем $x^3yzt = x(yz)^3t = xy^3z^3t$. В силу четвертого утверждения леммы 6.3 $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству

$$x^3yzt = 0. \tag{6.4}$$

Положим $W(\mathcal{V}) = \{u \in F \,|\, u \text{ не равно } 0 \text{ в } \mathcal{V} \text{ и } 1 < n(u) < \ell(u)\}$. Это обозначение будет использоваться и во всех последующих подразделах без специальных оговорок. Проведенные выше выкладки позволяют легко проверить, что всякое слово из $W(\mathcal{V})$ подобно в $\mathcal{V}$ некоторому слову из множества

$$\{x_1^2x_2^2\cdots x_i^2x_{i+1}x_{i+2}\cdots x_k, x^3y, x^3y^2, x^3yz\},\ \text{где } k \geqslant 2,\ \text{а } i = 1, 2, \ldots, k.$$

Предположим, что в некотором подмногообразии $\mathcal{X}$ многообразия $\mathcal{V}$ выполнено тождество $u = v$, где $\ell(u) < \ell(v)$. Из сказанного выше легко вытекает, что либо $c(u) \neq c(v)$, либо $u \lhd v$, либо $u \overset{\mathcal{X}}{\approx} x^3yz$, а $v \overset{\mathcal{X}}{\approx} x^2y^2z^2$. В силу первого и четвертого утверждений леммы 6.3 это означает, в частности, что $\mathcal{V}$ наследственно m-однородно при $m \neq 3$.

Для произвольных натуральных чисел i и k таких, что $i \leqslant k$, положим

$$G_{k,i} = \{\sigma \in \mathbf{S}_k \,|\, j\sigma \leqslant i \text{ при } 1 \leqslant j \leqslant i \text{ и } j\sigma > i \text{ при } i < j \leqslant k\}.$$

Ясно, что $G_{k,i}$ - подгруппа в $\mathbf{S}_k$. Прямые вычисления позволяют установить, что непустыми собственными трансверсалями вида $W_{n,m} = W_{n,m}(\mathcal{V})$ являются следующие множества и только они (здесь и всюду ниже, перечисляя элементы трансверсалей, мы разделяем орбиты точкой с запятой):

$W_{k+1,k} = \{x_i^2x_1 \cdots x_{i-1}x_{i+1} \cdots x_k \,|\, 1 \leqslant i \leqslant k\}$, где $k \geqslant 2$;
$W_{4,2} = \{x^3y, y^3x;\ x^2y^2\}$;
$W_{5,2} = \{x^3y^2, y^3x^2\}$;
$W_{5,3} = \{x^3yz;\ x^2y^2z, x^2z^2y, y^2z^2x\}$;
$W_{6,3} = \{x^2y^2z^2\}$;
$W_{k+i,k} = \{x_{1\sigma}^2x_{2\sigma}^2 \cdots x_{i\sigma}^2x_{(i+1)\sigma}x_{(i+2)\sigma} \cdots x_{k\sigma} \mid \sigma$ пробегает систему различных представителей правых смежных классов группы $\mathbf{S}_k$ по подгруппе $G_{k,i}\}$, где $k \geqslant 4$, а $i = 2, 3, \ldots, k$.

Сегрегированность всех этих трансверсалей вытекает из леммы 5.3. Кроме того, очевидно, что все трансверсали содержат не более двух орбит. Проверим, что решетки конгруэнций всех орбит всех трансверсалей лежат в $\mathbf{M}_{3,4}$. Для всех трансверсалей, кроме $W_{k+i,k}$ при $k \geqslant 4$, это вытекает из следствия 5.2. Пусть теперь $k \geqslant 4$, $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ и $W = W_{k,i}$. Положим $w_{k,i} \equiv x_1^2x_2^2 \cdots x_i^2x_{i+1}x_{i+2} \cdots x_k$. Очевидно, что трансверсаль W транзитивна, $w_{k,i} \in W$ и $\mathrm{Stab}_W(w_{k,i}) = G_{k,i}$. Интервал $[G_{k,i}, \mathbf{S}_k]$ решетки $\mathrm{Sub}(\mathbf{S}_k)$ содержит не более трех элементов (см. [17, лемма 1.1]). Остается воспользоваться леммой 5.1. Итак, если $m \neq 3$, то выполнено условие (i) леммы 6.14 при $\mathbf{L} = \mathbf{M}_{4,3}$.

Осталось рассмотреть случай $m = 3$. Положим $W_3 = W_3^0(\mathcal{V})$, $C_3 = C_3(\mathcal{V})$ и $E_3' = E_3'(\mathcal{V})$. Ясно, что W_3 состоит из следующих шести орбит:

$$U_0 = \{0\},\ U_1 = \{xyz, xzy, yxz, yzx, zxy, zyx\},\ U_2 = \{x^2yz, y^2xz, z^2xy\},$$
$$U_3 = \{x^2y^2z, x^2z^2y, y^2z^2x\},\ U_4 = \{x^2y^2z^2\},\ U_5 = \{x^3yz\}.$$

Очевидно, что выполнена посылка леммы 6.11. В силу этой леммы C_3 состоит из жадных конгруэнций. В силу следствия 5.2 решетки конгруэнций всех орбит лежат в $\mathbf{M}_{3,4}$. Осталось проверить, что $E_3' \in \mathbf{M}_{3,4}$.

Пусть α – конгруэнция из C_3 такая, что $\alpha^* \in E_3'$. Предположим, что $U_3\alpha^*U_5$. Тогда в $\mathcal{V}_\alpha$ выполнено тождество $x^2y^2z = x^3yz$. Умножая это тождество справа на z и учитывая, что в $\mathcal{V}$ выполнено тождество (6.4), получаем, что в этом случае $U_4\alpha^*U_0$. Заметим еще, что $U_2 \lhd U_i$ и $\ell(U_2) < \ell(U_i)$ для $i = 3, 4, 5$, а также что $U_3 \lhd U_4$ и $\ell(U_3) < \ell(U_4)$. Используя лемму 6.10, легко понять, что решетка E_3' имеет вид, показанный на рис. 5. В частности, эта решетка лежит в $\mathbf{M}_{3,4}$.

Итак, при $m = 3$ выполнено условие (ii) леммы 6.14 при $\mathbf{L} = \mathbf{M}_{4,3}$.

В силу лемм 6.13 и 6.14 $L(\mathcal{V}) \in \mathbf{M}_{4,3}$.

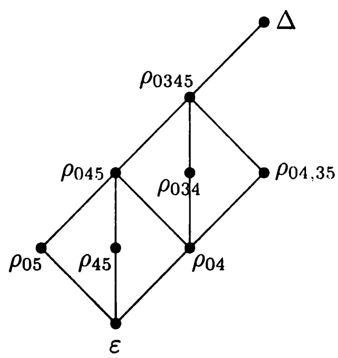

Рис. 5. Решетка E_3' для системы $(m5)$

6.4. Система тождеств $(m6)$

В систему тождеств $(m6)$ входит тождество $x^2y^2z = xy^2z^2$. Подставляя в него x^2 вместо x, получаем $x^4y^2z = x^2y^2z^2$. В силу четвертого утверждения леммы 6.3 это означает, что в $\mathcal{V}$ выполнено тождество $x^2y^2z^2 = 0$. Поэтому на протяжении данного подраздела можно считать, что многообразие $\mathcal{V}$ задано тождествами

$$x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi},\ x^2y = xyx = yx^2,\ x^2y^2z = xy^2z^2,\ x^2y^2z^2 = 0,$$

где $\pi \in \Pi_1$.

Напомним, что тождество $u = v$ называется *уравновешенным*, если $\ell_x(u) = \ell_x(v)$ для всякой буквы x. В силу тождеств $x^2y = xyx = yx^2$ в $\mathcal{V}$ выполняются все неперестановочные уравновешенные тождества. Учитывая это обстоятельство и подставляя zt вместо z в тождество $x^2y^2z = xy^2z^2$, получаем, что $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождествам $x^2y^2zt = xy^2(zt)^2 = y^2z^2t^2x$. В силу четвертого утверждения леммы 6.3 в $\mathcal{V}$ выполнено тождество $x^2y^2zt = 0$. С помощью этого тождества легко проверить, что каждое слово из множества $W(\mathcal{V})$ подобно в $\mathcal{V}$ некоторому слову из множества

$$\{x_1^2x_2x_3\cdots x_k, x_1^3x_2x_3\cdots x_k, x^2y^2, x^3y^2, x^2y^2z\},\text{ где } k\geqslant 2.$$

Теперь очевидно, что если $u,v\in W(\mathcal{V})$ и $\ell(u)<\ell(v)$, то либо $c(u)\neq c(v)$, либо $u\lhd v$. Из первого и четвертого утверждений леммы 6.3 вытекает, что $\mathcal{V}$ наследственно m-однородно для всякого $m>1$.

Прямые вычисления показывают, что непустыми собственными трансверсалями вида $W_{n,m}=W_{n,m}(\mathcal{V})$ являются множества $W_{k+1,k}$, $W_{k+2,k}$ (где $k\geqslant 2$), $W_{5,2}$ и только они, причем $W_{k+1,k}$ (при $k\geqslant 2$), $W_{4,2}$ и $W_{5,2}$ имеют тот же вид, что и в подразделе 6.3, а $W_{k+2,k}$ при $k\geqslant 3$ выглядит следующим образом:

$$W_{5,3}=\{x^3yz, y^3xz, z^3xy;\ x^2y^2z\};$$
$$W_{k+2,k}=\{x_i^3x_1\cdots x_{i-1}x_{i+1}\cdots x_k\mid 1\leqslant i\leqslant k\},\text{ если } k\geqslant 4.$$

В силу следствия 5.2 решетки конгруэнций всех орбит трансверсалей $W_{4,2}$, $W_{5,2}$ и $W_{5,3}$ лежат в $\mathbf{M}_{3,4}$. Трансверсали $W_{k+1,k}$ $W_{k+2,k}$ транзитивны. Ясно, что стабилизатор любого элемента в каждой из двух последних трансверсалей равен $\mathrm{Stab}_1(k)$. Из леммы 5.1 и того факта, что $\mathrm{Stab}_1(k)$ является максимальной собственной подгруппой в $\mathbf{S}_k$, вытекает, что решетки $\mathrm{Con}(W_{k+1,k})$ и $\mathrm{Con}(W_{k+2,k})$ содержат не более двух элементов (в частности, лежат в $\mathbf{M}_{3,4}$).

Итак, решетки конгруэнций всех орбит всех собственных трансверсалей вида $W_{n,m}$ лежат в $\mathbf{M}_{3,4}$. Кроме того, очевидно, что все эти трансверсали имеют не более двух орбит, а в силу леммы 5.3 все трансверсали сегрегированы. Мы показали, что для всех $m>1$ выполнено условие (i) леммы 6.14 при $\mathbf{L}=\mathbf{M}_{4,3}$. В силу лемм 6.13 и 6.14 $L(\mathcal{V})\in\mathbf{M}_{4,3}$.

6.5. Система тождеств $(m7)$

Пусть теперь $\mathcal{V}$ – нильмногообразие, заданное системой тождеств $(m7)$. Этот случай разбирается вполне аналогично предыдущему. Поэтому мы позволим себе пропустить все выкладки, носящие рутинный характер, и ограничимся их результатами. В рассматриваемом случае многообразие $\mathcal{V}$ наследственно m-однородно для всякого $m>1$, а непустыми собственными трансверсалями вида $W_{n,m}=W_{n,m}(\mathcal{V})$ являются трансверсали $W_{k+1,k}$ (где $k\geqslant 2$), $W_{4,2}$, $W_{5,2}$, $W_{5,3}$ и только они, причем первые три из них имеют тот же вид, что и в подразделе 6.3, а $W_{5,3}=\{x^3yz, y^3xz, z^3xy\}$. Как и в предыдущем подразделе, из сказанного легко выводится, что $L(\mathcal{V})\in\mathbf{M}_{4,3}$.

6.6. Системы тождеств $(m8)$-$(m15)$

Для удобства дальнейших ссылок, сформулируем в виде леммы следующий факт, легко вытекающий из леммы 6.3.

Лемма 6.16. *Если нильмногообразие перестановочно и удовлетворяет одному из тождеств $x^2y = y^2x$, $xy^2 = yx^2$ и $x^2y = xy^2$, то оно удовлетворяет также тождеству*

$$x^2y^2 = 0. \tag{6.5}$$

Доказательство. Подставив в каждое из трех тождеств, указанных в посылке, x^2 вместо x, получим тождества $x^4y = y^2x^2$, $x^2y^2 = yx^4$ и $x^4y = x^2y^2$. Во всех трех случаях применимо четвертое утверждение леммы 6.3.

Как и в предыдущем подразделе, мы позволим себе ограничиться сводкой полученных результатов. Все они проверяются прямыми рутинными вычислениями с систематическим использованием лемм 6.3 и 6.16. Заметим, что мы можем не рассматривать системы тождеств $(m9)$, $(m11)$ и $(m15)$, поскольку они двойственны к системам $(m8)$, $(m10)$ и $(m14)$ соответственно. Итак, пусть $\mathcal{V}$ – нильмногообразие, заданное одной из систем тождеств $(m8)$, $(m10)$ и $(m12)$–$(m14)$. Тогда $\mathcal{V}$ наследственно m-однородно для всякого $m > 1$ и непустыми собственными трансверсалями вида $W_{n,m} = W_{n,m}(\mathcal{V})$ являются следующие множества и только они:

$$W_{3,2} = \begin{cases} \{x^2y, y^2x;\ xy^2\} & \text{для систем } (m8) \text{ и } (m10); \\ \{xyx;\ xy^2, yx^2\} & \text{для системы } (m12); \\ \{x^2y, y^2x\} & \text{для систем } (m13) \text{ и } (m14); \end{cases}$$

$$W_{4,3} = \begin{cases} \{xyxz\} & \text{для системы } (m12) \text{ при } \pi = (12)(34); \\ \{xyxz;\ yxzx\} & \text{для системы } (m12) \text{ при } \pi = (13)(24); \\ \{xyxz, yxyz, zxzy\} & \text{для системы } (m12) \text{ при } \pi = (14)(23); \end{cases}$$

$$W_{k+1,k} = \{x_i^2x_1 \cdots x_{i-1}x_{i+1} \cdots x_k \mid 1 \leqslant i \leqslant k\} \text{ для системы } (m8) \text{ при } \pi \in \{(134), (234), (12)(34)\}, \text{ причем } k \geqslant 3 \text{ при } \pi = (234) \text{ и } k = 3 \text{ при } \pi \in \{(134), (12)(34)\}.$$

Как и в двух предыдущих подразделах, получаем, что $L(\mathcal{V}) \in \mathbf{M}_{4,3}$.

6.7. Системы тождеств $(\ell 1)$ *и* $(\ell 2)$

Поскольку системы тождеств $(\ell 1)$ и $(\ell 2)$ двойственны друг к другу, достаточно рассмотреть первую из них. Итак, предположим, что $\mathcal{V}$ – нильмногообразие, заданное системой тождеств $(\ell 1)$.

В силу леммы 6.16 в $\mathcal{V}$ выполнено тождество (6.5). Поэтому далее в данном подразделе можно считать, что $\mathcal{V}$ – многообразие, заданное тождествами

$$x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi},\ x^2y = y^2x,\ xyx = yxy,\ x^2y^2 = 0,$$

где $\pi \in \Pi_1$.

Несложные вычисления показывают, что $\mathcal{V}$ наследственно m-однородно для всякого $m > 1$ и непустыми собственными трансверсалями вида $W_{n,m} = W_{n,m}(\mathcal{V})$ являются следующие множества и только они:

$$W_{3,2} = \{x^2y;\ xyx;\ xy^2, yx^2\} \text{ при всех } \pi \in \Pi_1;$$
$$W_{4,2} = \{xy^3, yx^3\}, \text{ если } \pi = (234);$$
$$W_{4,3} = \begin{cases} \{xyz^2, yxz^2, xzy^2\}, & \text{если } \pi = (124); \\ \{xyz^2, yxz^2, zxy^2\}, & \text{если } \pi = (234); \\ \{xyz^2, xzy^2, yzx^2;\ xyxz\}, & \text{если } \pi = (12)(34); \\ \{xyxz;\ yxzx\}, & \text{если } \pi = (13)(24); \\ \{xy^2z;\ xyxz, xzxy, yzyx\}, & \text{если } \pi = (14)(23). \end{cases}$$

Из следствия 5.2 вытекает, что решетки конгруэнций всех орбит этих трансверсалей полумодулярны вверх. А в силу леммы 5.3 все трансверсали сегрегированы. Мы показали, что для всех $m > 1$ выполнено условие (i) леммы 6.15. Леммы 6.13 и 6.15 показывают, что решетка $L(\mathcal{V})$ полумодулярна вниз.

6.8. Системы тождеств $(m16)$-$(m23)$

Здесь мы также позволим себе опустить все выкладки и ограничиться сводкой полученных результатов. Как и ранее, все они проверяются прямыми рутинными вычислениями с систематическим использованием лемм 6.3 и 6.16. Заметим только, что мы можем не рассматривать системы тождеств $(m17)$ и $(m19)$, поскольку они двойственны системам $(m16)$ и $(m18)$ соответственно. Кроме того, рассмотрение двух последних систем сильно упрощается тем очевидным фактом, что каждая из них влечет систему $(\ell 1)$. Это позволяет при рассмотрении систем $(m16)$ и $(m18)$ использовать результаты, полученные в предыдущем подразделе.

Итак, пусть $\mathcal{V}$ – нильмногообразие, заданное одной из систем тождеств $(m16)$, $(m18)$ и $(m20)$-$(m23)$. Тогда $\mathcal{V}$ наследственно m-однородно для всякого $m > 1$ и непустыми собственными трансверсалями вида $W_{n,m} = W_{n,m}(\mathcal{V})$ являются следующие множества и только они:

$$W_{4,3} = \begin{cases} \{xyz^2, xzy^2, yzx^2\} & \text{для системы } (m16) \text{ при } \pi = (12)(34); \\ \{xy^2z\} & \text{для системы } (m16) \text{ при } \pi = (14)(23); \\ \{xyz^2, xzy^2, yzx^2; & \\ \quad xyxz\} & \text{для системы } (m18) \text{ при } \pi = (12)(34); \\ \{xyxz;\ yxzx\} & \text{для систем } (m18), (m20) \text{ при } \pi = (13)(24); \\ \{xyxz, xzxy, yzyx\} & \text{для системы } (m18) \text{ при } \pi = (14)(23); \\ \{xyxz\} & \text{для системы } (m20) \text{ при } \pi = (12)(34); \\ \{x^2yz;\ xyxz\} & \text{для систем } (m21) \text{ и } (m23); \\ \{x^2yz\} & \text{для системы } (m22); \end{cases}$$

$$W_{3,2} = \begin{cases} \{x^2y, y^2x; xyx\} & \text{для систем } (m16) \text{ и } (m20)\text{–}(m23); \\ \{xyx; xy^2, yx^2\} & \text{для системы } (m18). \end{cases}$$

$$W_{4,2} = \{x^3y\} \text{ для системы } (m20) \text{ при } \pi = (13)(24);$$

Точно так же, как и в подразделах 6.3–6.6, из этих данных вытекает, что $L(\mathcal{V}) \in \mathbf{M}_{4,3}$.

6.9. Системы тождеств ($\ell 3$)–($\ell 11$)

Пусть $\mathcal{V}$ – нильмногообразие, заданное одной из систем тождеств ($\ell 3$)–($\ell 11$). В силу леммы 6.16 в $\mathcal{V}$ выполнено тождество (6.5). Мы не будем рассматривать здесь систему тождеств ($\ell 6$), поскольку она двойственна к системе ($\ell 5$). Таким образом, в этом подразделе можно считать, что $\mathcal{V}$ – многообразие, заданное либо системой тождеств

$$x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi},\ x^2y = y^2x,\ xy^2 = yx^2,\ x^2y^2 = 0, \tag{6.6}$$

где $\pi \in \Pi_3$, либо системой тождеств (6.6) при $\pi = (13)(24)$ вместе с одним из тождеств

$$xyxz = yxzx,\ xyxz = yxyz,$$

либо системой тождеств (6.6) при $\pi = (14)(23)$ вместе с одним из тождеств

$$xyxz = xyzx,\ xyxz = yxzy,\ xyxz = zxyz,\ xyxz = yzyx,\ xyzx = yxzy.$$

Непосредственно проверяется, что $\mathcal{V}$ наследственно m-однородно при $m > 2$, а если $\mathcal{V}$ удовлетворяет одной из систем ($\ell 3$) при $\pi \in \{(123), (124), (134), (234)\}$, ($\ell 5$) и ($\ell 7$)–($\ell 10$)), то $\mathcal{V}$ и наследственно 2-однородно.

Простые вычисления показывают, что непустыми собственными трансверсалями вида $W_{n,m} = W_{n,m}(\mathcal{V})$ являются следующие множества и только они:

$$W_{3,2} = \{x^2y;\ xy^2;\ xyx, yxy\} \text{ для всех систем;}$$

$$W_{4,2} = \{(xy)^2\} \text{ для систем } (\ell 3) \text{ при } \pi = (12)(34),\ (\ell 4) \text{ и } (\ell 11);$$

$$W_{4,3} = \begin{cases} \{xyxz, xzxy, yxyz, yzyx, \\ \ \ zxzy, zyzx;\ xy^2z\} & \text{для системы } (\ell 3) \text{ при } \pi = (12)(34); \\ \{xyxz, yxyz, zxzy;\ xy^2z\} & \text{для систем } (\ell 4) \text{ и } (\ell 7); \\ \{xyxz;\ xy^2z;\ xyzy, xzyz, \\ \ \ yxzx\} & \text{для системы } (\ell 5); \\ \{xyxz, xzxy, yxyz;\ xy^2z\} & \text{для систем } (\ell 8) \text{ и } (\ell 9); \\ \{xyxz;\ xy^2z;\ xyzx, yxzy, \\ \ \ zxyz\} & \text{для системы } (\ell 10); \\ \{xyxz, xzxy, yxyz, yzyx, \\ \ \ zxzy, zyzx;\ xy^2z;\ xyzx\} & \text{для системы } (\ell 11). \end{cases}$$

Из следствия 5.2 вытекает, что решетки конгруэнций всех орбит этих трансверсалей полумодулярны вверх, а в силу леммы 5.3 сами трансверсали сегрегированы. Если $\mathcal{V}$ удовлетворяет одной из систем ($\ell3$) при $\pi \in \{(123), (124), (134), (234)\}$, ($\ell5$) и ($\ell7$)–($\ell10$), то из сказанного вытекает, что для всякого $m > 1$ выполнено условие (i) леммы 6.15. В силу леммы 6.15 в указанном случае решетка $L(\mathcal{V})$ полумодулярна вниз.

Остается рассмотреть системы ($\ell3$) при $\pi = (12)(34)$, ($\ell4$) и ($\ell11$). Итак, в оставшейся части этого подраздела $\mathcal{V}$ – многообразие, заданное одной из следующих систем тождеств:

$$xyzt = yxtz,\ x^2y = y^2x,\ xy^2 = yx^2,\ x^6 = 0;$$
$$xyzt = ztxy,\ x^2y = y^2x,\ xy^2 = yx^2,\ xyxz = yxzx,\ x^6 = 0;$$
$$xyzt = tzyx,\ x^2y = y^2x,\ xy^2 = yx^2,\ xyzx = yxzy,\ x^6 = 0.$$

Из сказанного выше вытекает, что для всякого $m > 2$ выполнено условие (i) леммы 6.15.

Осталось рассмотреть случай $m = 2$. Пусть для краткости $W_2 = W_2^0(\mathcal{V})$, $C_2 = C_2(\mathcal{V})$ и $E_2' = E_2'(\mathcal{V})$. Из сказанного выше ясно, что W_2 состоит из следующих шести орбит:

$$U_0 = \{0\},\ U_1 = \{xy, yx\},\ U_2 = \{x^2y\},$$
$$U_3 = \{xy^2\},\ U_4 = \{xyx, yxy\},\ U_5 = \{(xy)^2\}.$$

Из леммы 6.11 вытекает, что решетка C_2 состоит из жадных конгруэнций. Очевидно, что решетки конгруэнций всех орбит содержат не более двух элементов, и потому все их подрешетки полумодулярны вверх. Следовательно, решетка $C_m^{U_i}(\mathcal{V})$ полумодулярна вверх при $1 \leqslant i \leqslant 5$. Осталось убедиться в том, что решетка E_2' полумодулярна вверх.

Пусть α – конгруэнция из C_2 такая, что $\alpha^* \in E_2'$. Предположим, что $U_2\alpha^*U_4$. Тогда в $\mathcal{V}_\alpha$ выполнено тождество $x^2y = xyx$. Умножая его справа на y и учитывая (6.5), получаем, что $(xy)^2 = 0$ в $\mathcal{V}_\alpha$, т.е. $U_5\alpha^*U_0$. Аналогично проверяется, что если $U_3\alpha^*U_4$, то $U_5\alpha^*U_0$. Кроме того, отметим, что $U_4 \lhd U_5$ и $\ell(U_4) < \ell(U_5)$. Используя лемму 6.10, легко понять, что решетка E_2' имеет вид, показанный на рис. 6. Прямой перебор всех пар элементов этой решетки позволяет убедиться в том, что она полумодулярна вверх. Но, учитывая, что эта решетка имеет довольно сложный вид, мы приведем рассуждение, позволяющее резко сократить упомянутый перебор. Напомним, что E_2' – подрешетка решетки $\mathrm{Eq}(\mathrm{Orb}(W_2))$. Для краткости обозначим последнюю решетку через $\overline{E}_2$. Глядя на рис. 6, легко понять, что если $\xi, \lambda \in E_2'$ и ξ покрывает λ в E_2', то ξ получается из λ объединением некоторых двух λ-классов. Отсюда вытекает, что ξ покрывает λ и в решетке $\overline{E}_2$ (см., например, [24, лемма

IV.4.1(iii)]). Пусть теперь $\mu, \nu \in E_2'$ и μ покрывает $\mu \wedge \nu$ в E_2'. В силу сказанного μ покрывает $\mu \wedge \nu$ и в $\overline{E}_2$. Как хорошо известно, решетка эквивалентностей на произвольном множестве полумодулярна вверх (см., например, [24, теорема IV.4.2]). Следовательно, $\mu \vee \nu$ покрывает ν в $\overline{E}_2$. Но тогда, очевидно, $\mu \vee \nu$ покрывает ν и в E_2'. Мы показали, что решетка E_2' полумодулярна вверх. Таким образом, при $m = 2$ выполнено условие (ii) леммы 6.15. В силу лемм 6.13 и 6.15 решетка $L(\mathcal{V})$ полумодулярна вниз.

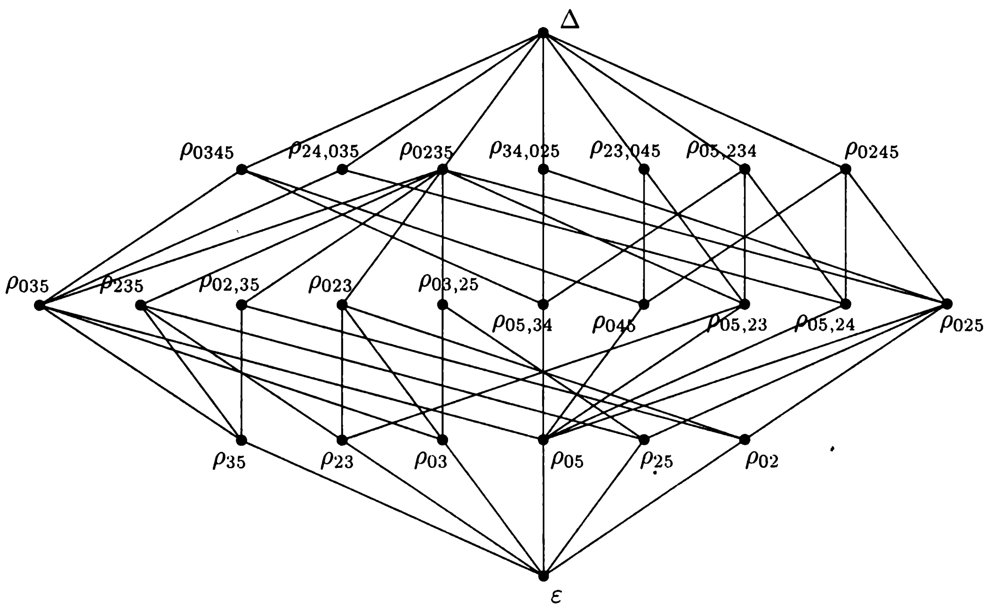

Рис. 6. Решетка E_2' для систем ($\ell 3$) при $\pi = (12)(34)$, ($\ell 4$) и ($\ell 11$)

Теорема 2 полностью доказана. Тем самым мы завершили доказательство теоремы 3 работы [1].

6.10. Системы тождеств ($m24$)-($m41$)

Поскольку системы ($m24$), ($m26$)-($m28$) и ($m32$)-($m36$) двойственны к системам ($m25$), ($m29$)-($m31$) и ($m37$)-($m41$) соответственно, достаточно рассмотреть системы ($m25$), ($m29$)-($m31$) и ($m37$)-($m41$). Пусть $\mathcal{V}$ - нильмногообразие, заданное одной из этих систем. В силу четвертого утверждения леммы 6.3 каждая из систем ($m25$), ($m29$)-($m31$) и ($m37$)-($m41$) влечет тождество $xy^2 = 0$, а значит и тождество $x^3y = yx^3$. Итак, на протяжении этого подраздела можно считать, что $\mathcal{V}$ - многообразие полугрупп, заданное либо системой тождеств

$$x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi},\ x^2y = y^2x,\ xy^2 = 0, \tag{6.7}$$

где $\pi \in \Pi_3$, либо системой тождеств (6.7) при $\pi = (13)(24)$ вместе с одним из тождеств

$$xyxz = yxzx,\ xyxz = yxyz,\ xyzy = xzyz,$$

либо системой тождеств (6.7) при $\pi = (14)(23)$ вместе с одним из тождеств

$$xyxz = xyzx,\ xyxz = yxzy,\ xyxz = zxyz,\ xyxz = yzyx,\ xyzx = yxzy.$$

Ясно, что системы тождеств ($m25$), ($m29$), ($m30$), ($m31$), ($m37$), ($m38$), ($m39$), ($m40$) и ($m41$) влекут системы ($\ell3$), ($\ell4$), ($\ell5$), ($\ell6$), ($\ell7$), ($\ell8$), ($\ell9$), ($\ell10$) и ($\ell11$) соответственно. В силу результатов подраздела 6.9, если $\mathcal{V}$ удовлетворяет одной из систем ($m25$) при $\pi \in \{(123),(124),(134),(234)\}$, ($m30$), ($m31$) и ($m37$)–($m40$), то $\mathcal{V}$ наследственно m-однородно для всякого $m > 1$, а если $\mathcal{V}$ удовлетворяет одной из систем ($m25$) при $\pi = (12)(34)$, ($m29$) и ($m41$), то $\mathcal{V}$ наследственно m-однородно для всякого $m > 2$. Сравнение вида собственных трансверсалей $W_{n,m}$ из подраздела 6.9 и систем тождеств ($m25$), ($m29$)–($m31$) и ($m37$)–($m41$) показывает, что непустыми собственными трансверсалями вида $W_{n,m} = W_{n,m}(\mathcal{V})$ будут следующие множества и лишь они:

$W_{3,2} = \{x^2y; xyx, yxy\}$ для всех систем;

$W_{4,2} = \{(xy)^2\}$ для систем ($m25$) при $\pi = (12)(34)$, ($m29$) и ($m41$);

$$W_{4,3} = \begin{cases} \{xyxz, xzxy, yxyz, yzyx, \\ \quad zxzy, zyzx\} & \text{для системы } (m25) \text{ при } \pi = (12)(34); \\ \{xyxz, yxyz, zxzy\} & \text{для систем } (m29) \text{ и } (m37); \\ \{xyxz; xyzy, xzyz, yxzx\} & \text{для системы } (m30); \\ \{xyxz, xzxy, yxyz\} & \text{для систем } (m38) \text{ и } (m39); \\ \{xyxz; xyzx, yxzy, zxyz\} & \text{для системы } (m40); \\ \{xyxz, xzxy, yxyz, yzyx, \\ \quad zxzy, zyzx; xyzx\} & \text{для системы } (m41). \end{cases}$$

Все эти трансверсали содержат не более двух орбит. Сегрегированность трансверсалей вытекает из леммы 5.3, а принадлежность решеток конгруэнций их орбит квазимногообразию $\mathbf{M}_{3,4}$ – из следствия 5.2. Итак, если $\mathcal{V}$ удовлетворяет одной из систем ($m25$) при $\pi \in \{(123),(124),(134),(234)\}$, ($m30$), ($m31$) и ($m37$)–($m40$), то для всякого натурального $m > 1$ выполнено условие (i) леммы 6.14 при $\mathbf{L} = \mathbf{M}_{4,3}$. В силу лемм 6.13 и 6.14 в указанном случае $L(\mathcal{V}) \in \mathbf{M}_{4,3}$.

Остается рассмотреть системы ($m25$) при $\pi = (12)(34)$, ($m29$) и ($m41$). Итак, в оставшейся части этого подраздела $\mathcal{V}$ – многообразие полугрупп, заданное одной из следующих систем тождеств:

$$xyzt = yxtz,\ x^2y = y^2x,\ xy^2 = 0;$$
$$xyzt = ztxy,\ x^2y = y^2x,\ xy^2 = 0,\ xyxz = yxzx;$$
$$xyzt = tzyx,\ x^2y = y^2x,\ xy^2 = 0,\ xyzx = yxzy.$$

Из сказанного выше вытекает, что для всякого $m > 2$ выполнено условие (i) леммы 6.14 при $\mathbf{L} = \mathbf{M}_{4,3}$.

Осталось рассмотреть случай $m = 2$. Пусть для краткости $W_2 = W_2^0(\mathcal{V})$, $C_2 = C_2(\mathcal{V})$ и $E_2' = E_2'(\mathcal{V})$. В силу леммы 6.16 в $\mathcal{V}$ выполнено тождество (6.5). Из сказанного выше ясно, что W_2 состоит из следующих пяти орбит:

$$U_0,\ U_1 = \{xy, yx\},\ U_2 = \{x^2y\},\ U_3 = \{xyx, yxy\},\ U_4 = \{(xy)^2\}.$$

Из леммы 6.11 вытекает, что решетка C_2 состоит из жадных конгруэнций. Кроме того, очевидно, что решетки конгруэнций всех орбит лежат в $\mathbf{M}_{3,4}$. Осталось убедиться в том, что $E_2' \in \mathbf{M}_{3,4}$.

Пусть α – конгруэнция из C_2 такая, что $\alpha^* \in E_2'$. Предположим, что $U_2\alpha^*U_3$. Тогда в $\mathcal{V}_\alpha$ выполнено тождество $x^2y = xyx$. Умножая это тождество справа на y и учитывая, что в $\mathcal{V}$ выполнено тождество (6.5), получаем, что в этом случае $U_4\alpha^*U_0$. Заметим еще, что $U_3 \lhd U_4$ и $\ell(U_3) < \ell(U_4)$. Используя лемму 6.10, легко понять, что решетка E_2' имеет вид, показанный на рис. 7. В частности, эта решетка лежит в $\mathbf{M}_{3,4}$.

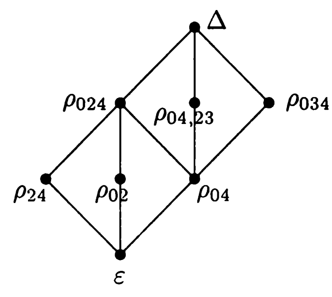

Рис. 7. Решетка E_2' для систем ($m25$) при $\pi = (12)(34)$, ($m29$) и ($m41$)

Итак, при $m = 2$ выполнено условие (ii) леммы 6.14 при $\mathbf{L} = \mathbf{M}_{4,3}$. В силу лемм 6.13 и 6.14 $L(\mathcal{V}) \in \mathbf{M}_{4,3}$.

6.11. Системы тождеств $(m42)$-$(m47)$

В работе [8] показано, что если нильмногообразие $\mathcal{V}$ удовлетворяет системе тождеств $(m47)$, то $L(\mathcal{V}) \in \mathbf{M}_{4,3}$. Системы $(m42)$–$(m46)$ разбираются вполне аналогично. Поэтому мы не будем приводить здесь никаких вычислений, но для полноты картины укажем их результаты. Достаточно рассмотреть системы тождеств $(m43)$, $(m45)$ и $(m47)$, поскольку они двойственны к системам $(m42)$, $(m44)$ и $(m46)$ соответственно.

Пусть $\mathcal{V}$ – нильмногообразие, заданное одной из систем тождеств $(m43)$, $(m45)$ и $(m47)$. Тогда $\mathcal{V}$ наследственно m-однородно для всякого $m > 2$ и есть лишь одна непустая собственная трансверсаль вида $W_{n,m} = W_{n,m}(\mathcal{V})$, где $m > 2$, а именно трансверсаль

$$W_{4,3} = \begin{cases} \{xyxz, xzxy, yxyz, yzyx, zxzy, zyzx\} & \text{для системы } (m43); \\ \{xyxz, yxyz, zxzy\} & \text{для системы } (m45); \\ \{xyxz, xzxy, yxyz, yzyx, zxzy, zyzx;\ xyzx\} & \text{для системы } (m47). \end{cases}$$

Далее, многообразие $\mathcal{V}$ не является 2-однородным. Положим $W_2 = W_2^0(\mathcal{V})$, $C_2 = C_2(\mathcal{V})$ и $E_2' = E_2'(\mathcal{V})$. Большая 0-трансверсаль W_2 состоит из следующих пяти орбит:

$$U_0 = \{0\},\ U_1 = \{xy, yx\},\ U_2 = \{xy^2\},\ U_3 = \{xyx, yxy\},\ U_4 = \{(xy)^2\},$$

решетка C_2 состоит только из жадных конгруэнций этого $\mathbf{S}_2$-множества, а решетка E_2' имеет такой же вид, как одноименная решетка, изображенная на рис. 7. Проверка того факта, что $L(\mathcal{V}) \in \mathbf{M}_{4,3}$, завершается теперь вполне аналогично тому, как это было сделано в предыдущем подразделе.

Теорема 1 полностью доказана. Тем самым мы завершили доказательство теоремы 2 работы [1] и теорем 1–3 работы [3].

6.12. Следствия

Напомним, что многообразие полугрупп называется *комбинаторным*, если все группы в нем тривиальны. Доказанная только что теорема 2 работы [1] устанавливает, в частности, что в решетках многообразий полугрупп модулярность влечет существенно более сильное (в абстрактных решетках) тождество дезарговости. Как мы увидим ниже (см. следствие 6.2), в комбинаторном случае справедливо значительно более сильное утверждение. Чтобы доказать его, нам понадобится следующее

Предложение 6.1. *Пусть* $\mathbf{L}$ *– нетривиальное квазимногообразие модулярных решеток. Решетка подмногообразий комбинаторного многообразия полугрупп* $\mathcal{V}$ *принадлежит* $\mathbf{L}$ *тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:*

(i) *$\mathcal{V}$ удовлетворяет одной из следующих систем тождеств:*

$$xy = (xy)^2; \tag{6.8}$$
$$xy = x^2y,\ (xy)^2 = xy^2,\ xyzt = xyxzt; \tag{6.9}$$
$$xy = xy^2,\ (xy)^2 = x^2y,\ xyzt = xytzt; \tag{6.10}$$

(ii) *$\mathcal{V} = \mathcal{C} \vee \mathcal{M}$, где $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}_\omega$ и $L(\mathcal{M}) \in \mathbf{L}$;*

(iii) *$\mathcal{V} = \mathcal{F} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{F}$ - одно из многообразий $\mathcal{SL}$ и $\mathcal{T}$, а $\mathcal{N}$ - нильмногообразие такое, что $L(\mathcal{N}) \in \mathbf{L}$.*

Доказательство. Необходимость. Ясно, что решетка $L(\mathcal{V})$ модулярна. Отсюда, в силу теоремы 2 работы [1], вытекает, что $\mathcal{V}$ удовлетворяет одной из систем тождеств $(m1)$–$(m47)$. Легко понять, что в классе комбинаторных многообразий системы тождеств $(m1)$, $(m2)$ и $(m3)$ влекут системы тождеств (6.8), (6.9) и (6.10) соответственно. Если $\mathcal{V}$ удовлетворяет системе тождеств $(m4)$, то из доказательства леммы 6.5 и комбинаторности многообразия $\mathcal{V}$ вытекает, что $\mathcal{V}$ удовлетворяет одному из условий (ii) и (iii) доказываемого предложения. Наконец, если $\mathcal{V}$ удовлетворяет одной из систем тождеств $(m5)$–$(m47)$, то из доказательства леммы 6.8 вытекает, что $\mathcal{V}$ удовлетворяет условию (iii) доказываемого предложения.

Достаточность. Если $\mathcal{V}$ удовлетворяет системе тождеств (6.8), то решетка $L(\mathcal{V})$ дистрибутивна [25]. Предположим, что $\mathcal{V}$ удовлетворяет системе тождеств (6.9). В силу леммы 6.1 решетка $L(\mathcal{V})$ вкладывается в прямое произведение 4-элементной цепи и решетки подмногообразий некоторого вполне регулярного многообразия, содержащегося в $\mathcal{V}$. Ясно, что всякое комбинаторное вполне регулярное многообразие состоит из связок, а, как хорошо известно, решетка всех многообразий связок дистрибутивна (см., например, [18]). Следовательно, и решетка $L(\mathcal{V})$ дистрибутивна. Поскольку система тождеств (6.10) двойственна к (6.9), всякое многообразие, удовлетворяющее (6.10), также имеет дистрибутивную решетку подмногообразий. Любое нетривиальное квазимногообразие решеток содержит все дистрибутивные решетки. Следовательно, выполнение в $\mathcal{V}$ любого из тождеств (6.8)–(6.10) влечет принадлежность решетки $L(\mathcal{V})$ квазимногообразию $\mathbf{L}$. Если же $\mathcal{V}$ удовлетворяет одному из условий (ii) и (iii) доказываемого предложения, то $L(\mathcal{V}) \in \mathbf{L}$ в силу лемм 6.4 и 6.7 соответственно.

Следствие 6.2. *Решетка подмногообразий комбинаторного многообразия полугрупп модулярна тогда и только тогда, когда она принадлежит квазимногообразию $\mathbf{M}_{4,3}$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{V}$ – комбинаторное многообразие полугрупп с модулярной решеткой подмногообразий. Тогда $\mathcal{V}$ удовлетворяет одному из условий (i)–(iii) предложения 6.1, где в условиях (ii) и (iii) $\mathbf{L}$ – многообразие всех модулярных решеток. Применяя предложение 6.1 в случае, когда $\mathbf{L}$ – многообразие всех дистрибутивных решеток, мы получаем, что многообразия, удовлетворяющие условию (i) этого предложения, имеют дистрибутивную решетку подмногообразий (как уже отмечалось выше, для многообразия, заданного системой тождеств (6.8), этот факт доказан в [25]). Из теоремы 2 работы [1] и результатов, полученных в подразделах 6.3–6.6, 6.8, 6.10 и 6.11, вытекает, что если нильмногообразие имеет модулярную решетку подмногообразий, то эта решетка принадлежит $\mathbf{M}_{4,3}$. Учитывая леммы 6.4 и 6.7, получаем, что если $\mathcal{V}$ удовлетворяет одному из условий (ii) и (iii) предложения 6.1, то $L(\mathcal{V}) \in \mathbf{M}_{4,3}$.

Обозначим через $\mathbf{ARG}$ многообразие всех дезарговых решеток, а через $\mathbf{Eq}_4$, $\mathbf{M}_{4,3}^{\mathrm{var}}$ и $\mathbf{E}$ — многообразия, порожденные соответственно решеткой эквивалентностей на 4-элементном множестве, решеткой $M_{4,3}$ и решеткой, изображенной на рис. 6. В силу теоремы 2 работы [1] в решетках многообразий полугрупп слабая полумодулярность вверх влечет дезарговость. Сравнение теорем 2 и 3 работы [1] показывает, что аналог этого утверждения для слабой полумодулярности вниз не имеет места. Возникает вопрос: существует ли нетривиальное решеточное тождество, выполненное во всех слабо полумодулярных вниз решетках многообразий полугрупп? Положительный ответ на него дает

Следствие 6.3. *Если $\mathcal{V}$ — многообразие полугрупп со слабо полумодулярной вниз решеткой подмногообразий, то решетка $L(\mathcal{V})$ принадлежит многообразию $\mathbf{ARG} \vee \mathbf{Eq}_4^{\partial} \vee \mathbf{E}^{\partial}$. Если при этом многообразие $\mathcal{V}$ комбинаторно, то $L(\mathcal{V}) \in \mathbf{M}_{4,3}^{\mathrm{var}} \vee \mathbf{Eq}_4^{\partial} \vee \mathbf{E}^{\partial}$.*

Доказательство. В силу теоремы 3 работы [1] $\mathcal{V}$ удовлетворяет одной из систем тождеств (m1)–(m15), (m20)–(m23) и (ℓ1)–(ℓ11). Если $\mathcal{V}$ удовлетворяет одной из систем тождеств (m1)–(m15) или (m20)–(m23), то, в силу теоремы 2 работы [1], $L(\mathcal{V}) \in \mathbf{ARG}$; если при этом $\mathcal{V}$ комбинаторно, то, в силу следствия 6.2, $L(\mathcal{V}) \in \mathbf{M}_{4,3}^{\mathrm{var}}$. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда $\mathcal{V}$ удовлетворяет одной из систем тождеств (ℓ1)–(ℓ11). В силу леммы 6.8 можно считать, что $\mathcal{V}$ — нильмногообразие. Рассмотрения, проведенные в подразделах 6.7 и 6.9, в сочетании со следствием 5.1 и леммой 5.2 показывают, что если $\mathcal{V}$ удовлетворяет одной из систем тождеств (ℓ1)–(ℓ3) и (ℓ5)–(ℓ10) (где в системе (ℓ3) π — одна из перестановок (123), (124), (134) и (234)), то $L(\mathcal{V}) \in \mathbf{M}_{4,3}^{\mathrm{var}} \vee \mathbf{Eq}_4^{\partial}$. Пусть, наконец, $\mathcal{V}$ удовлетворяет одной из систем тождеств ($\ell3$) при $\pi = (12)(34)$, ($\ell4$) и ($\ell11$). Рассмотрения, проведенные в подразделе 6.9, в сочетании с предложением 5.2, леммой 5.2 и следствием 6.1, показывают, что $C_m(\mathcal{V}) \in \mathbf{M}_{4,3}^{\mathrm{var}} \vee \mathbf{Eq}_4^{\partial}$ при $m \neq 2$ и $C_2(\mathcal{V}) \in \mathbf{E}^{\partial}$. В силу предложения 5.1, $L(\mathcal{V}) \in \mathbf{M}_{4,3}^{\mathrm{var}} \vee \mathbf{Eq}_4^{\partial} \vee \mathbf{E}^{\partial}$.

Отметим, что $\mathbf{ARG} \vee \mathbf{Eq}_4^{\partial} \vee \mathbf{E}^{\partial}$ – собственное многообразие решеток в силу результатов работы [26]; иными словами, в $\mathbf{ARG} \vee \mathbf{Eq}_4^{\partial} \vee \mathbf{E}^{\partial}$ выполнено некоторое нетривиальное решеточное тождество.

Каждое из многообразий $\mathbf{M}_{4,3}^{\mathrm{var}}$, $\mathbf{Eq}_4^{\partial}$ и $\mathbf{E}^{\partial}$, а значит и их объединение $\mathbf{M}_{4,3}^{\mathrm{var}} \vee \mathbf{Eq}_4^{\partial} \vee \mathbf{E}^{\partial}$, порождается конечной решеткой. Хорошо известно, что всякое подмногообразие многообразия, порождаемого конечной решеткой, само порождено конечной решеткой [24, лемма V.2.3] и потому имеет конечный базис тождеств [24, теорема V.3.4]. Поэтому из теоремы 2 работы [1] и следствий 6.2 и 6.3 вытекает

Следствие 6.4. *Если решетка подмногообразий комбинаторного многообразия полугрупп слабо полумодулярна вверх или слабо полумодулярна вниз, то эта решетка имеет конечный базис тождеств.*

Литература

1. Верников Б. М. Полумодулярные и дезарговы многообразия полугрупп: запрещенные подмногообразия // Изв. Урал. гос. ун-та. 2002. № 22. (Математика и механика. Вып. 4). С. 16–42.
2. Волков М. В. Полумодулярные и дезарговы многообразия полугрупп: тождества // Там же. С. 43–61.
3. Волков М. В. Многообразия полугрупп с модулярной решеткой подмногообразий // Докл. РАН. 1992. Т. 326, № 3. С. 409–413.
4. Волков М. В. Многообразия полугрупп с модулярной решеткой подмногообразий // Изв. вузов. Математика. 1989. № 6. С. 48–58.
5. Волков М. В. Многообразия полугрупп с модулярной решеткой подмногообразий. II // Там же. 1992. № 7. С. 3–8.
6. Волков М. В. Многообразия полугрупп с модулярной решеткой подмногообразий. III // Там же. № 8. С. 21–29.
7. Volkov M. V., Ershova T. A. The lattice of varieties of semigroups with completely regular square // Monash Conf. on Semigroup Theory in honour of G. B. Preston. Singapore: World Scientific, 1991. P. 306–322.
8. Верников Б. М., Волков М. В. Строение решеток многообразий нильполугрупп // Изв. Урал. гос. ун-та. 2000. № 18. (Математика и механика. Вып. 3). С. 34–52.

9. VERNIKOV B. M. On congruences of G-sets // Comment. Math. Univ. Carol. 1997. Vol. 38, № 3. P. 603–613.

10. NELSON E. The lattice of equational classes of semigroups with zero // Canad. Math. Bull. 1971. Vol. 14, № 4. P. 531–534.

11. ВЕРНИКОВ Б. М., ВОЛКОВ М. В. Решетки нильпотентных многообразий полугрупп. II // Изв. Урал. гос. ун-та. 1998. № 10. (Математика и механика. Вып. 1). С. 13–33.

12. MCKENZIE R. N., MCNULTY G. F., TAYLOR W. F. Algebras. Lattices. Varieties. Vol. 1. Monterey: Wadsworth&Brooks/Cole, 1987.

13. ГОРБУНОВ В. А. Алгебраическая теория квазимногообразий. Новосибирск: Науч. кн., 1999.

14. PASTIJN F. J. The lattice of completely regular semigroup varieties // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. 1990. Vol. 49, № 1. P. 24–42.

15. HEAD T. J. The lattice of varieties of commutative monoids // Nieuw Arch. Wiskunde. 1968. Vol. 16. P. 203–206.

16. САПИР М. В., СУХАНОВ Е. В. О многообразиях периодических полугрупп // Изв. вузов. Математика. 1981. № 4. С. 48–55.

17. VERNIKOV B. M., VOLKOV M. V. Commuting fully invariant congruences on free semigroups // Contrib. General Algebra. 2000. Vol. 12. P. 391–417.

18. EVANS T. The lattice of semigroup varieties // Semigroup Forum. 1971. Vol. 2, № 1. P. 1–43.

19. ВЕРНИКОВ Б. М. О многообразиях полугрупп, решетка подмногообразий которых разложима в прямое произведение // Алгебраич. системы и их многообразия. Свердловск: УрГУ, 1988. С. 41–52.

20. ГОЛУБОВ Э. А., САПИР М. В. Финитно аппроксимируемые многообразия полугрупп // Изв. вузов. Математика. 1982. № 11. С. 21–29.

21. МЕЛЬНИК И. И. О многообразиях и решетках многообразий полугрупп // Исслед. по алгебре. Вып. 2. Саратов: Саратов. гос. ун-т, 1970. С. 47–57.

22. STERN M. Semimodular lattices. Theory and applications. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999.

23. POLLÁK GY. On the consequences of permutation identities // Acta Sci. Math. (Szeged). 1973. Vol. 34. P. 323–333.

24. ГРЕТЦЕР Г. Общая теория решеток. М.: Мир, 1982.

25. GERHARD J. A. Semigroups with an idempotent power. II. The lattice of equational subclasses of $[(xy)^2 = xy]$ // Semigroup Forum. 1977. Vol. 14, № 4. P. 375–388.

26. DEAN R. A., EVANS T. A remark on varieties of lattices and semigroups // Proc. Am. Math. Soc. 1969. Vol. 21, № 2. P, 394–396.

Статья поступила 21.03.2001 г.